

Road to IPhO

Электронная лампа

Данная задача посвящена устройству, называемому электронной лампой. Электронные лампы различны по своей форме и конструкции, однако принцип действия у всех одинаков: в вакуумированной колбе расположены два электрода: катод и анод. Катод нагревается за счёт протекания по нему (или по вблизи расположенному нагревателю) электрического тока, что приводит к термоэлектронной эмиссии – излучению электронов с его поверхности. Между катодом и анодом есть разность потенциалов, приводящая к дальнейшему движению электронов в вакууме.

Кроме катода и анода в объёме лампы могут находиться другие элементы (например, так называемые сетки), влияющие на движение электронов в лампе.

Во всех ответах этой задачи кроме указанных в каждом пункте величин вы можете использовать:

- магнитную постоянную $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/А²;
- электрическую постоянную $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м;
- постоянную Больцмана $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К;
- массу электрона $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ кг;
- модуль заряда электрона $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Примечание. В задаче потребуется решать уравнение вида

$$\psi''(z) = f(\psi(z)),$$

которое после домножения обеих частей на $\psi'(z)$ и интегрирования преобразуется к виду

$$\int \psi'(z)\psi''(z)dz = \int f(\psi(z))\psi'(z)dz.$$

Интегрирование даёт

$$\frac{\psi'(z)^2}{2} = \int f(\psi(z))d\psi(z) + C,$$

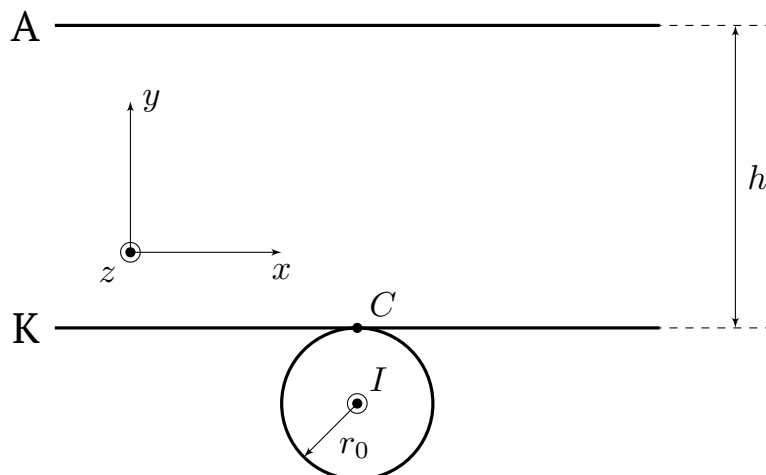
где C – константа, определяемая из начальных условий. После вычисления интеграла в правой части уравнения для заданной функции f переменные разделяются.

Часть А. Движение электрона в электромагнитном поле (3.8 балла)

Рассмотрим вакуумный диод – лампу, в объёме которой расположены катод и анод.

Пусть катод и анод являются тонкими параллельными пластинами площади S . Расстояние между пластинами h , причём $h \ll \sqrt{S}$. Нагрев катода осуществляется за счёт вплотную прижатого к нему прямого длинного провода радиуса r_0 . По проводу течёт однородно распределённый по сечению ток I .

Направим ось x на рисунке вправо, параллельно пластинам, ось y вверх, перпендикулярно пластинам. За начало координат выберем точку C , расположенную над проводом. Ось z направим перпендикулярно рисунку на нас.



Road to IPhO

Для начала рассмотрим движение первого испускаемого электрона после включения тока, то есть пока в пространстве между электродами нет пространственного заряда. В этом случае электрон движется в электрическом поле катода и анода, а также в магнитном поле, создаваемое током нагревателя. Разность потенциалов катода и анода постоянна и равна $U = \varphi_A - \varphi_K > 0$.

A1 Пусть электрон начинает движение с нулевой начальной скоростью из точки C . Покажите, что в этом случае $x(t) = 0$. **0.3**

A2 Для описанного случая запишите второй закон Ньютона в проекции на оси y, z , из них получите выражения для \ddot{y}, \ddot{z} . В выражениях могут присутствовать $\dot{y}, \dot{z}, y, z, U, I$, а также геометрические характеристики системы. **0.5**

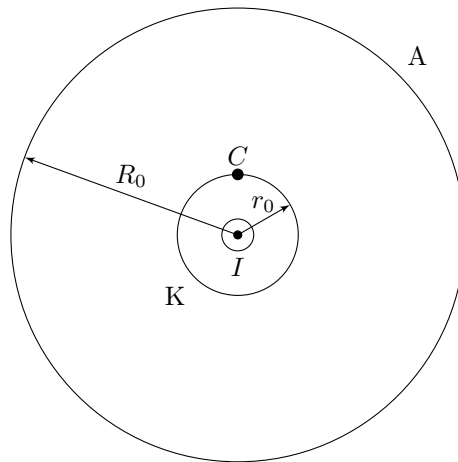
A3 Получите дифференциальное уравнение относительно y вида **1.0**

$$\ddot{y} = \alpha - \beta \frac{\ln\left(1 + \frac{y}{r_0}\right)}{1 + \frac{y}{r_0}},$$

где α, β – константы. Найдите α, β . В ответе могут присутствовать все введённые ранее величины и константы.

A4 Найдите максимальное значение тока нагревателя $I_{кр}$, при котором рассматриваемый электрон достигает анода. **0.8**

Рассмотрим другую также часто используемую конфигурацию анода и катода. Пусть катод является металлическим проводом радиуса r_0 , длины L , по которому течёт однородно распределённый ток I , протекание тока нагревает провод, что приводит к эмиссии электронов. Анод является поверхностью цилиндра радиуса R_0 , длины L ($L \gg R_0$). Как и раньше, разность потенциала анода и катода составляет $U = \varphi_A - \varphi_K > 0$.



A5 Пусть электрон начинает движение с нулевой начальной скоростью из точки C в цилиндрической конфигурации лампы. Найдите в этом случае максимальное значение тока нагревателя $I_{кр}$, при котором электрон достигает анода. **1.2**

Часть В. ВАХ вакуумного диода (4.1 балла)

В установившемся режиме от катода к аноду движутся электроны, создавая ток, зависящий от напряжения U , подаваемого на лампу. Наличие электронов в междуэлектродном пространстве приводит к некоторому установившемуся распределению плотности заряда и потенциала в нём.

Данная часть посвящена нахождению ВАХ диода, пространственных распределений потенциала и зарядов.

В действительности в лампах всегда $I \ll I_{кр}$, поэтому в дальнейшем будем рассматривать движение только в электрическом поле. Также в дальнейшем будем пренебрегать начальной скоростью электронов. Это предположение хорошо работает при $kT \ll eU$, где T – температура катода.

Road to IPhO

Рассмотрим плоскую конфигурацию.

Будем считать, что каждый электрон движется в среднем потенциале, создаваемом всеми остальными электронами. Пусть $\rho(y)$, $\varphi(y)$ – зависимости плотности заряда и потенциала от координаты y . Для определённости будем считать потенциал катода равным нулю ($\varphi(0) = 0$).

В1 Получите дифференциальное уравнение, связывающее $\varphi(y)$ и $\rho(y)$. **0.3**

В2 Предположим, что $U > 0$. Найдите скорость электрона $v(y)$, эмиттированного с катода, на расстоянии y от катода. Ответ выразите через $\varphi(y)$. **0.2**

В3 Выразите полный ток I , протекающий через сечение $y = \text{const}$. Ответ выразите через $\rho(y)$, $v(y)$ и геометрические характеристики системы. Положительным считайте направление тока от анода к катоду. **0.3**

Будем считать, что электрическое поле непосредственно у катода отсутствует, что даёт ещё одно начальное условие: $\varphi'(0) = 0$.

В4 Получите дифференциальное уравнение на $\varphi(y)$, содержащее функцию $\varphi(y)$ и её производные, а также I и геометрические характеристики системы. **0.4**

В5 Получите зависимость $\varphi(y)$. Ответ выразите через I и геометрические характеристики системы. **0.8**

В6 ВАХ лампы при $U > 0$ может быть выражен функцией **0.8**

$$I(U) = GU^\gamma.$$

Определите коэффициенты G , γ . Ответ выразите через геометрические характеристики системы. Величина G называется *первеансом* лампы.

В7 Получите зависимость $\rho(y)$. Ответ выразите через I и геометрические характеристики системы. **0.5**

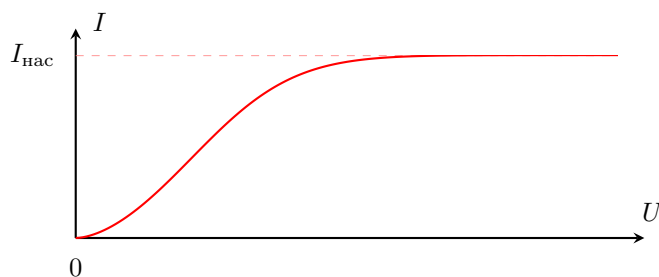
В8 Получите ВАХ лампы $I(U)$ при $U < 0$. **0.2**

Рассмотрим цилиндрическую конфигурацию.

Обозначим r – расстояние от оси провода до электрона. Распределение потенциала в такой системе является функцией только r .

В9 Получите дифференциальное уравнение на $\varphi(r)$, содержащее функцию $\varphi(r)$ и её производные, а также полный ток в лампе I и геометрические характеристики системы. **0.6**

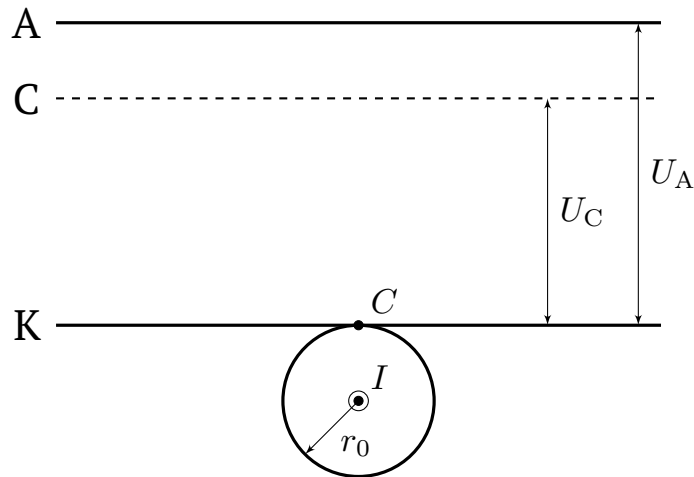
Полученное уравнение не решается аналитически, однако можно показать, что для цилиндрической конфигурации ВАХ имеет тот же вид с тем же показателем степени γ .



Степенной вид ВАХ предсказывает неограниченное возрастание I с увеличением U . В действительности этого не происходит, так как ток I ограничен скоростью эмиссии электронов с катода. При больших напряжениях ток равен току насыщения $I_{\text{нас}}$. Характерная эмпирическая зависимость тока лампы от напряжения представлена на графике.

Road to IPhO

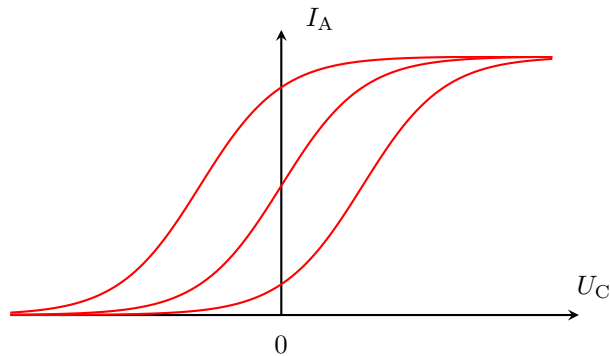
Часть С. Триод и генератор Ван-дер-Поля (2.1 балла)



Пусть теперь в пространство между пластин параллельно им внесена проводящая сетка, имеющая потенциал φ_C . Напряжение $U_C = \varphi_C - \varphi_K$ называется сеточным, $U_A = \varphi_A - \varphi_K$ анодным. Такая система называется триодом. Мы будем считать сетку достаточно крупной, так что все электроны, движущиеся в пространстве лампы, проходят сквозь неё, т. е. с сетки ток не стекает.

Наличие сетки изменяет распределение потенциала в пространстве и таким образом позволяет управлять током электронов. Ток, текущий между анодом и катодом I_A , зависит как от U_C , так и от U_A .

Зависимости I_A от U_C при $U_A = \text{const}$ для разных значений U_A представлены на рисунке ниже.

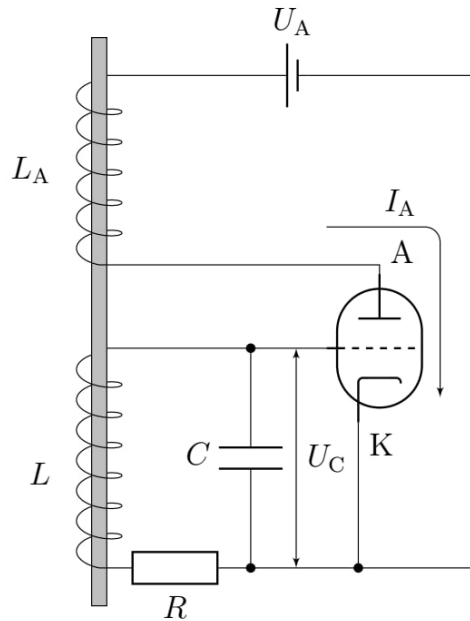


Зависимости $I_A(U_C)$ при различных фиксированных U_A

Теперь рассмотрим электрическую схему с триодом, называемую *генератором Ван-дер-Поля*. Такой генератор позволяет возбуждать периодические колебания при наличии только источника постоянного тока. Рассмотрим подробнее механизм возбуждения колебаний.

Необходимые обозначения элементов, токов и напряжений обозначены на рисунке.

Road to IPhO



В отсутствие напряжения на конденсаторе, которое, как видно на схеме, совпадает с сеточным напряжением U_C , можно так подобрать анодное напряжение U_A , чтобы зависимость $I_A(U_C)$ при $U_A = \text{const}$ вблизи $U_C = 0$ была представима в виде

$$I_A(U_C) \simeq I_0 + \lambda U_C - \mu U_C^3, \quad (1)$$

где λ, μ – положительные константы. Сделаем следующие приближения:

1. Для рассматриваемых далее значений U_C формула (1) выполнена в точности.
2. Будем считать ЭДС, наводимую катушкой L в катушке L_A , пренебрежимо малой по сравнению с напряжением анода, поэтому анодное напряжение U_A остаётся константой, совпадающей с напряжением батарейки.
3. Катушка L_A , создает в катушке L ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = M \frac{dI_A}{dt},$$

где M – коэффициент взаимной индукции катушек. Знак M зависит от взаимной ориентации катушек, а также от выбранного направления обхода RLC-контура. В связи с этим далее **неважны знаки \mathcal{E} и M , вы можете выбрать их произвольно.**

C1 Закон Кирхгофа для RLC-контура приводит к дифференциальному уравнению вида

0.9

$$\ddot{U}_C + \zeta(1 + \eta U_C^2)\dot{U}_C + \chi U_C = 0.$$

Выразите ζ, η, χ через R, L, C, M, λ, μ .

Пусть в начальный момент $U_C = 0$. Оказывается, при некотором соотношении параметров схемы возможна автоматическая раскачка колебаний (увеличение амплитуды со временем) с последующим выходом на периодический режим при сколь угодно малом отклонении U_C от нуля.

C2 Пусть U_C отклоняется от нуля на малую величину. Получите условие на параметры ζ, η, χ , при котором происходит раскачка колебаний. Выразите также полученное условие в терминах R, L, C, M, λ, μ . **1.2**