

Road to IPhO

Треугольное сближение (12 баллов)

Проводящие поверхности имеют одинаковый электростатический потенциал во всех своих точках. При движении проводящих тел заряд по ним перетекает, что приводит к потерям энергии в системе, а уравнения электростатики становятся неприменимыми. Однако в случае нерелятивистских скоростей и достаточно большой проводимости уравнения электростатики можно считать выполнимыми в любой момент времени.

Во всех частях задачи считайте распределение заряда в системе стационарным в любой момент времени, влиянием возникающих магнитных полей и эффектов запаздывания полностью пренебрегайте.

Часть А. Основные уравнения электростатики (1.8 балла)

Проводящий шар заряжен зарядом q .

A1 Определите распределение заряда по поверхности шара. **0.1**

Теперь поместим незаряженный шар радиусом R с диэлектрической проницаемостью ε в однородное поле \vec{E} в вакууме.

A2 Запишите граничные условия для нормальной и касательной компонент электрического поля на границе шара и среды. **0.4**

Введем угол θ между направлением поля и радиусом, как показано на рисунке 1.

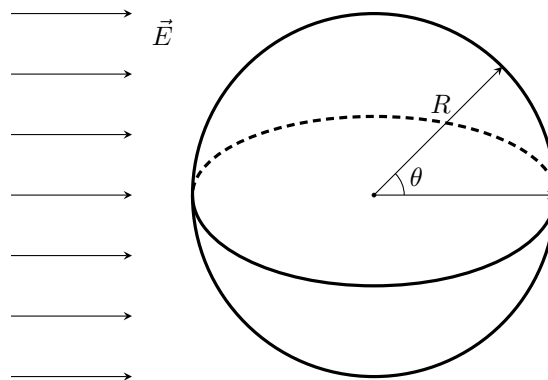


Рис. 1. Диэлектрический шар в однородном поле

A3 Используя теорему Гаусса, покажите, что поверхностная плотность заряда на шаре удовлетворяет соотношению **1.2**

$$\zeta(\theta) = A \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \cos \theta$$

и определите A . Ответ выразите через диэлектрическую постоянную ε_0 и E .

Теперь тот же шар зарядили зарядом q .

A4 Запишите распределение заряда по поверхности шара $\zeta(\theta)$. Ответ выразите через ε_0 , E , ε , q , R . **0.1**

Часть В. Стабильная треугольная система (1.8 балла)

Рассмотрим три проводящие (ведущие себя подобно диэлектрику с $\varepsilon \gg 1$) сферы радиусом R . Их массы m_1, m_2, m_3 , заряды q_1, q_2, q_3 соответственно. Считайте выполненным соотношение

$$\frac{q_1}{m_1} = \frac{q_2}{m_2} = \frac{q_3}{m_3}.$$

Во всех последующих пунктах задачи нельзя пренебрегать гравитацией, если не сказано иного. Расстояния между сферами всегда считайте во много раз превышающими R .

Road to IPhO

Введём постоянную $\gamma = \sqrt{1 - \frac{q^2}{4\pi G \varepsilon_0 m^2}}$, где G – гравитационная постоянная. Для всех тел $\gamma > 0$, сферы в начальный момент времени практически равномерно вращаются вокруг общего центра масс с угловой скоростью ω_0 . Также $M = m_1 + m_2 + m_3$.

Далее используйте введённые на рисунке 2 обозначения.

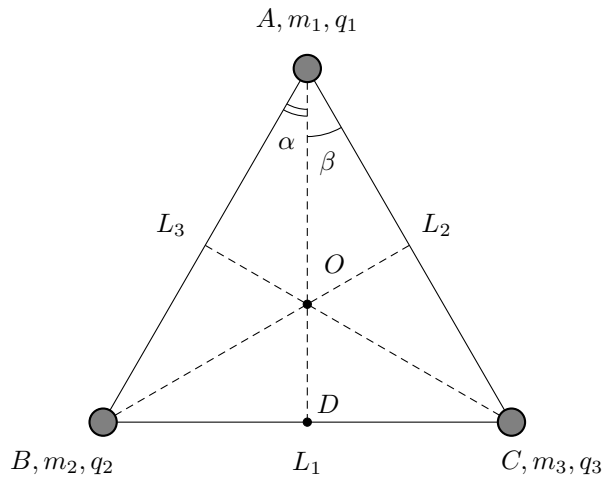


Рис. 2. Устойчивая треугольная система

B1 Рассмотрев касательные силы, действующие на сферу 1, получите связь на $m_2, m_3, L_2, L_3, \sin \alpha, \sin \beta$. **0.2**

B2 Докажите, что $L_1 = L_2 = L_3 = L$. **1.2**

Далее вы можете использовать факт из пункта **B2**, даже если не смогли доказать его.

B3 Определите расстояние между сферами L_0 в начальный момент времени. Ответ выразите через G, γ, ω_0, M . **0.4**

Часть С. Потери энергии в треугольной системе (3.1 балла)

При описанном движении заряд будет перетекать по поверхностям сфер. Из-за этого возникнет выделение джоулева тепла.

Все сферы имеют толщину $h \ll R$, расстояние между ними L , ток в сечении проводника распределен равномерно, проводимость сфер одинакова и равна σ .

Пусть на участке проводника проводимостью σ объёмная плотность тока равна \vec{j} ($|\vec{j}| = \frac{dI}{dS}$, направление вектора совпадает с нормалью к поверхности).

C1 Выразите мощность джоулевых потерь в единице объема $\frac{dP}{dV}$. **0.2**
 Ответ запишите через j, σ .

Для расчёта потерь в системе сначала рассмотрим взаимодействие сферы 1 **только** со сферой 2. Если вы не решили пункт **A3**, вы можете принять $A = 2\varepsilon_0 E$. Для этого **явно укажите в листе решений использование авторского значения**. К потере баллов за последующие пункты это не приведет.

C2 Считая поле, создаваемое шаром 2 в окрестности шара 1, примерно однородным, получите зависимость **0.3** поверхностной плотности **индуцированного** заряда $\varsigma(\theta)$. Ответ выразите через q_2, L, θ .

Road to IPhO

Нетрудно заметить, что все векторы объемной плотности тока имеют только компоненту \vec{e}_θ .



Рис. 3. Взаимодействие заряженных сфер

C3 Рассматривая поток вектора плотности тока через малый элемент площади dS , получите дифференциальное уравнение на $j(\theta)$. Уравнение может содержать $\frac{dj}{dt}(\theta)$, R , h , θ , $\frac{dj}{d\theta}(\theta)$. Положительное направление вектора плотности тока выберите самостоятельно. **0.5**

C4 Запишите граничное условие на $j(\theta)$. Для этого определите минимальное значение плотности тока на сфере j_{\min} . **0.1**

C5 Выразите модуль объёмной плотности тока $j_{12}(\theta)$. Ответ может содержать q_2 , L , θ , R , h , ω , \dot{L} . **1.0**

Для учета взаимодействия с двумя сферами сразу можно воспользоваться принципом суперпозиции. В каждой точке сферы 1 вектор плотности тока \vec{j}_{13} , вызванной сферой 3, будет повернут на угол $\psi = \pi/3$ относительно \vec{j}_{12} . Угол θ всё ещё определён как на рисунке 3.

C6 Выразите для сферы 1 $j^2(\theta)$, учитывая взаимодействие с двумя оставшимися сферами. Ответ выразите через q_2 , q_3 , L , θ , R , h , ω , \dot{L} . **0.3**

C7 Определите полную мощность джоулевых потерь в системе. Ответ выразите через m_1 , m_2 , m_3 , R , h , σ , G , γ , L , \dot{L} . **0.7**

Часть D. Колебания треугольника (2.2 балла)

В этой части задачи исследуется эффект влияния поверхностных токов на движение системы.

В начальный момент времени вращение было практически равномерным, а сторона треугольника имела длину L_0 .

D1 Определите угловую скорость вращения системы ω в момент, когда расстояние между сферами равно L . Ответ выразите через G , γ , L_0 , M , L , R . **0.3**

D2 Выразите полную энергию системы W . Ответ может содержать G , γ , ω_0 , M , L , m_1 , m_2 , m_3 , \dot{L} . **0.7**

D3 Дифференцируя W по времени, получите дифференциальное уравнение на L . Выражение может содержать длину стороны треугольника L , ее производные по времени, G , γ , L_0 , M , m_1 , m_2 , m_3 , R , h , σ . **0.3**

Сторона треугольника совершила малое отклонение x_0 от равновесного состояния.

D4 В первом порядке малости по смещению x и его производным получите уравнение движения системы. Ответ выразите через G , x , γ , \dot{x} , \ddot{x} , M , L_0 , R , h , σ . **0.7**

Road to IPhO

Полученное вами уравнение является уравнением затухающих колебаний.

D5 В листе ответов сделайте обоснованный вывод об устойчивости треугольной системы.

0.2

Часть E. Разрядка в окружающую среду (3.1 балла)

На самом деле, окружающая среда неидеальна и обладает проводимостью σ_{out} , поэтому сферы медленно теряют свой заряд. Внешнее электрическое поле в среде отсутствует. Чтобы пронаблюдать описываемый эффект, в этой части задачи считайте, что диэлектрическая проницаемость среды близка к единице, но при этом обладает величиной $\kappa = \varepsilon - 1 \ll 1$, а так как сферы находятся далеко друг от друга, эти величины неодинаковы в окрестностях сфер и равны $\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3$ соответственно.

E1 Для сферы 1 получите дифференциальное уравнение на его заряд $Q_1(t)$ в зависимости от времени. Уравнение может включать в себя $Q_1(t)$, его производные по времени, σ_{out} , ε_0 , κ_1 .

0.3

E2 Решите это уравнение с граничным условием $Q_1(0) = q_1$. Получите выражение для характерного времени разрядки тела 1 τ_1 . Ответ выразите через σ_{out} , ε_0 .

0.3

В дальнейшем считайте для всех трех шаров выполненным условие $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \gg 1/\omega$ в любой момент времени.

E3 Укажите в листе ответов, к какой сфере будет прилежать наибольший угол в треугольнике, возникающий в процессе движения.

0.3

E4 Определите максимальный угол отклонения от равновесного значения ζ в треугольнике в процессе последующего движения, считая $\zeta \ll 1$. Ответ выразите через γ , κ_1 , κ_2 , κ_3 .

1.5

Далее используйте численные данные: $\gamma = 0.25$, $\kappa_1 = 5.0 \cdot 10^{-4}$, $\kappa_2 = 6.0 \cdot 10^{-4}$, $\kappa_3 = 7.0 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\sigma_{\text{out}} = 5.0 \cdot 10^{-16}$ См/м.

E5 В течение какого времени наблюдатели со сферы 1 смогут наблюдать отклонение угла от равновесного значения хотя бы на $\varphi_0 = 3''$? Достаточно привести только численный ответ.

0.7

Примечание: $1'' = 1^\circ/3600$.