

Road to IPhO

Трассировка лучей и генерация запутанных фотонов

Пусть \vec{E} – напряженность электрического поля, \vec{H} – напряженность магнитного поля, \vec{D} – электрическая индукция, \vec{B} – индукция магнитного поля. Известно, что $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, где \vec{P} – вектор поляризации вещества, ϵ_0 – электрическая постоянная. Будем рассматривать только немагнитные вещества, для них $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, где μ_0 – магнитная постоянная. Плотность энергии электромагнитного поля вычисляется по формуле $u_{em} = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$, плотность потока энергии (вектор Пойнтинга) $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$.

Плоская монохроматическая световая волна в однородной среде задаётся величинами: угловая частота ω , волновой вектор \vec{k} , \vec{D} , \vec{B} . Из уравнений Максвелла: $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$ и $\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D}$. В такой волне векторы \vec{D} и \vec{B} меняются в пространстве и во времени по синусоиде с фазой $(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$.

Часть А. Распространение света в изотропном диэлектрике (1.0 балл)

В изотропной среде $\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$ и $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, где χ – магнитная восприимчивость, $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$ – магнитная проницаемость. Фазовая скорость волны равна $v_p = c/n$, где c – скорость света в вакууме, n – показатель преломления. Можно также представлять свет набором лучей, направленных вдоль переноса энергии и имеющих скорость v_r , с которой переносится плотность энергии.

Рассмотрим плоскую световую волну с угловой частотой ω и волновым вектором \vec{k} в однородной изотропной диэлектрической среде.

A1 Получите выражение для фазовой скорости v_p через ϵ и μ_0 . **0.4**

A2 Напишите, как выражается показатель преломления n . **0.2**

A3 В каком направлении $\hat{S} \equiv \vec{S}/S$ переносится энергия? Какова скорость лучей v_r ? **0.4**

Часть В. Распространение света в одноосной среде (4.8 балла)

Теперь предположим, что среда имеет выделенное направление z (оптическую ось): $D_x = \epsilon E_x$, $D_y = \epsilon E_y$, $D_z = \epsilon' E_z$, где все оси попарно ортогональны. Тогда фазовая скорость зависит еще и от направлений \vec{k} и \vec{D} . Обозначив $n_o = c\sqrt{\mu_0 \epsilon}$ и $n_e = c\sqrt{\mu_0 \epsilon'}$, выполните пункты **B1**, **B2**, и **B3**.

B1 Пусть волновой вектор \vec{k} лежит в плоскости xz : $\vec{k} = k(\sin \theta, 0, \cos \theta)$. При заданном θ плоская монохроматическая волна может распространяться только при определенных направлениях \vec{D} и \vec{B} . **1.5**
Найдите эти возможные направления.
Выразите также все соответствующие показатели преломления через θ , n_o и n_e .
При каком угле θ возможно лишь одно значение показателя преломления?

B2 Поляризация световой волны (направление колебаний \vec{E}) может быть перпендикулярна плоскости xz **0.8** (обыкновенная волна, обыкновенный луч) или лежать в этой плоскости (обыкновенная волна/луч).
Для каждой из волн, найденных вами в **B1**, запишите единичный вектор в направлении поляризации.
Укажите, какая из них обыкновенная, а какая – необыкновенная.
Вычислите $\text{tg } \alpha$, где α – угол между \vec{E} и \vec{D} (α положительный, если вектора \vec{E} и \vec{D} лежат в плоскости xz и поворот от \vec{E} к \vec{D} происходит по часовой стрелке).

B3 Используйте результаты пунктов **B1** и **B2** в случае, когда \vec{k} по-прежнему составляет угол θ с положительным **0.6**
направлением оси z , но не лежит в плоскости xz .
Укажите возможные значения показателя преломления и соответствующие поляризации.

Road to IPhO

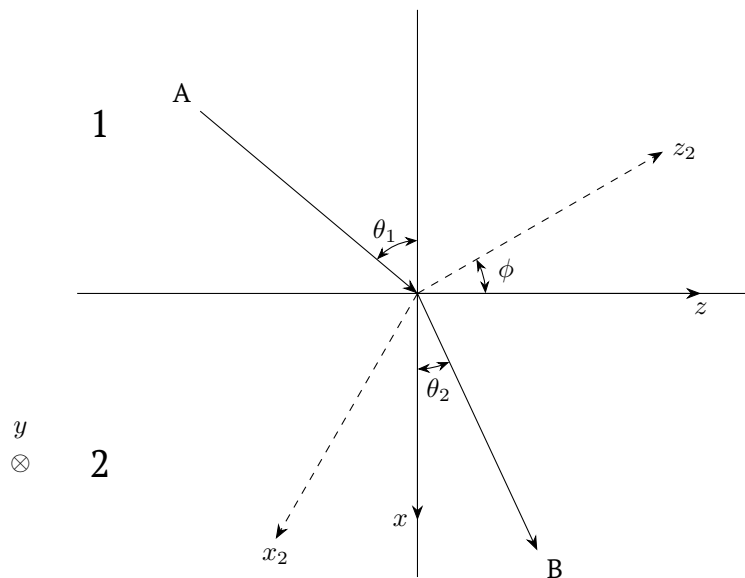
В одноосных средах направление светового луча может отличаться от направления вектора \vec{k} . Фазовая скорость по-прежнему вычисляется как c/n (n соответствует направлению \vec{k}). А скорость лучей определяется с учетом направления и плотности потока энергии.

В4 Пусть $\vec{k} = k(\sin \theta, 0, \cos \theta)$, как в пунктах **В1-3**. Угол между $\hat{k} \equiv \vec{k}/k$ и направлением луча, \hat{S} , обозначим α_r (α_r положительный, если вектора \hat{S} и \hat{k} лежат в плоскости xz и поворот от \hat{S} к \hat{k} происходит по часовой стрелке). **0.8**
Найдите возможные значения $\text{tg } \alpha_r$, скорости лучей v_r и вектора Пойнтинга \hat{S} . Используя эти результаты, выразите величину $n_s = c/v_r$ через \hat{S} , \hat{x} , \hat{z} , n_o , n_e .

Пусть луч света идет из А в В через границу раздела изотропной (1) и анизотропной (2) сред (см. рис. 1). Плоскость yz – граница раздела, xz – плоскость падения, и в ней же лежит направление поляризации. Угол падения θ_1 . Показатель преломления (1) равен n , показатели преломления (2) для направлений z_2, y_2, x_2 равны n_e, n_o, n_o соответственно. Причем ось y_2 совпадает с осью y . Из принципа Ферма следует:

$$\bar{A}(\text{tg } \theta_2)^2 + \bar{B} \text{tg } \theta_2 + \bar{C} = 0$$

В5 Получите выражения для $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ через P_1, P_2, P_3 и $n \sin \theta_1$, где $P_1 = n_o^2 \cos^2 \phi + n_e^2 \sin^2 \phi$, $P_2 = n_o^2 \sin^2 \phi + n_e^2 \cos^2 \phi$, $P_3 = (n_o^2 - n_e^2) \sin \phi \cos \phi$. С помощью уравнения (1) найдите $\text{tg } \theta_2$ для двух случаев ориентации: $\phi = 0$ и $\phi = \pi/2$. **1.1**



Часть С. Запутанность света (4.2 балла)

В нелинейной среде напряженность электрического поля \vec{E} связана с вектором поляризации \vec{P} выражением $P_i = (\epsilon - \epsilon_0)E_i + \sum_j \sum_k \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k$. Здесь i, j, k каждый может быть любым из трёх компонент x, y, z . $\chi_{ijk}^{(2)}$ есть константы, представляющие нелинейную восприимчивость среды второго порядка. Ненулевые $\chi_{ijk}^{(2)}$ приводят к тому, что при прохождении через нелинейную среду световая волна может расщепиться на две световые волны.

Предположим, что поскольку не все $\chi_{ijk}^{(2)}$ равны нулю, электрическое поле в среде является суперпозицией трёх плоских волн с угловыми частотами $\omega, \omega_1, \omega_2$, распространяющиеся с волновыми векторами $\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2$, соответственно. Будем считать, что $\omega \geq \omega_2$ и $\omega_1 \geq \omega_2$.

Road to IPhO

C1 Найдите все возможные отношения (известные как условия фазового синхронизма) между этими угловыми частотами и волновыми векторами. **0.8**

Если рассматривать свет состоящим из фотонов, какие законы сохранения подразумевают эти условия для трех указанных фотонов?

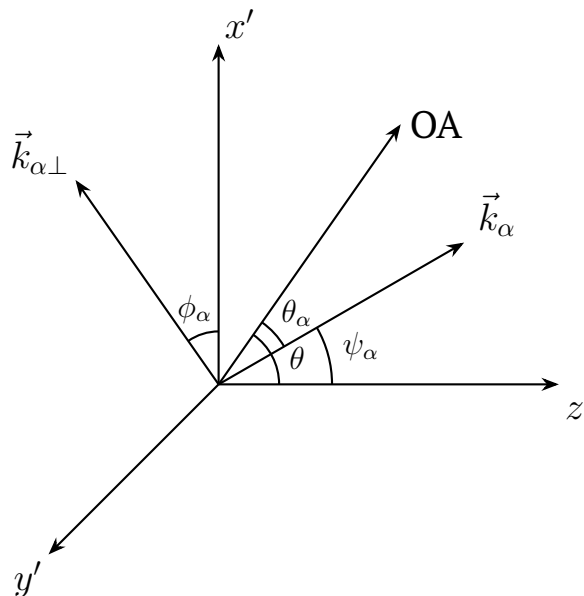
Запишите уравнения, выражающие эти законы сохранения для случая, когда фотон с угловой частотой ω и волновым вектором \vec{k} расщепляется на два фотона с угловыми частотами ω_1 и ω_2 , распространяясь с волновыми векторами \vec{k}_1 и \vec{k}_2 , соответственно.

C2 Рассмотрим световую волну в одноосной среде. Обозначим обыкновенный луч как o и необыкновенный луч как e . Есть 8 возможных путей расщепления световой волны: $o \rightarrow o + o$, $o \rightarrow e + o$, $o \rightarrow o + e$, $o \rightarrow e + e$, $e \rightarrow o + o$, $e \rightarrow e + o$, $e \rightarrow o + e$, и $e \rightarrow e + e$. Предположим, что коэффициенты преломления n_o и n_e оба являются возрастающей функцией от ω . Используя те же обозначения как и в вопросе C1 и считая что \vec{k} , \vec{k}_1 , и \vec{k}_2 коллинеарны, укажите какие из 8 путей расщепления не могут быть возможны. **0.8**

Рассмотрим падающий e луч распространяющийся вдоль направления оси z' с волновыми вектором \vec{k} и $\omega = \Omega_p$ в одноосной среде с показателем преломления $n_e < n_o$. Предположим, что при коллинеарном расщеплении $e \rightarrow e + o$, условие фазового синхронизма выполняется для $k_1 = K_e$, $\omega_1 = \Omega_e$, $k_2 = K_o$, и $\omega_2 = \Omega_o$. Здесь индексы 1 и 2 относятся к e лучу и к o лучу. Векторы \vec{k}_1 , \vec{k}_2 и \vec{k} все сонаправлены с направлением z' . Как показано на рис. 2(a), оптическая ось (the optic axis, OA) среды лежит в плоскости $x'z'$ и имеет угол $\theta < \pi/2$ с осью z' . Поэтому, получается что n_e есть функция от ω и θ , т.е., $n_e = n_e(\omega, \theta)$. Для того же падающего луча e с волновым вектором \vec{k} и $\omega = \Omega_p$, предположим неколлинеарное расщепление лучей $e + o$. Такое расщепление двух последних указанных лучей приводит к тому, что они расщепляются но остаются на двух конусах с $\omega_1 = \omega_2 = \Omega$, $k_1 = k_2$, как показано на рис. 2(b). Отметим, что при коллинеарном расщеплении, Ω_e уже близко к Ω_o , и здесь Ω лишь немного меньше Ω_e . В плоскости перпендикулярной к \vec{k} , два круговых сечения конусов k_1 и k_2 пересекаются в точках a и b так, что линия \overline{ab} параллельна оси y' . Как показано на рис. 2(a), \vec{k}_α ($\alpha = 1, 2$) составляет угол θ_α с оптической осью и имеет угловые координаты $(\psi_\alpha, \phi_\alpha)$. Здесь $\vec{k}_{\alpha\perp}$ является проекцией на плоскость $x'y'$. Каждый вектор \vec{k}_α отклоняется от оси z' только на малую величину $|(\Omega - \Omega_e)/\Omega_e| \ll 1$, $|\vec{k}_{\alpha\perp}|/k_\alpha \ll 1$ и $|\theta_\alpha - \theta| \ll 1$. Используя приближение, которые согласуются с z' компонентой \vec{k}_α до членов порядка $k_{\alpha\perp}^2$ и угол θ_α до $(\theta_\alpha - \theta)^2$, можно показать что $\vec{k}_{2\perp} = (q_{x'}, q_{y'})$ удовлетворяет выражению $M(q_{x'} + N)^2 + Mq_{y'}^2 = L$.

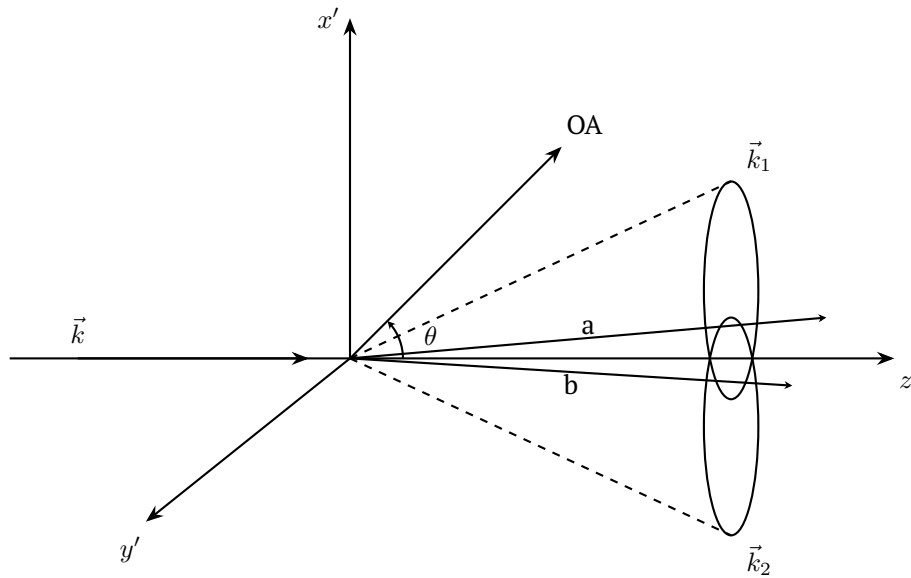
C3 Пусть $M > 0$. Выразите M , N , и L через Ω , Ω_e , Ω_o , K_e , K_o и $N_e(\omega, \theta) = \frac{1}{n_e(\omega, \theta)} \frac{dn_e(\omega, \theta)}{d\theta}$ и групповые скорости **1.3**

$u_o = \frac{d\omega_2}{dk_2}$ и $u_e = \frac{d\omega_1}{dk_1}$ для o и e лучей. Оцените угол между осью конуса и осью z' , и также оцените угол между осью и образующей конуса через L , M , N and K_o .



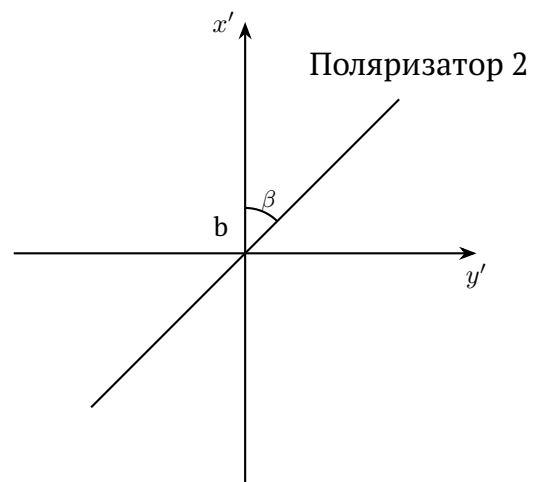
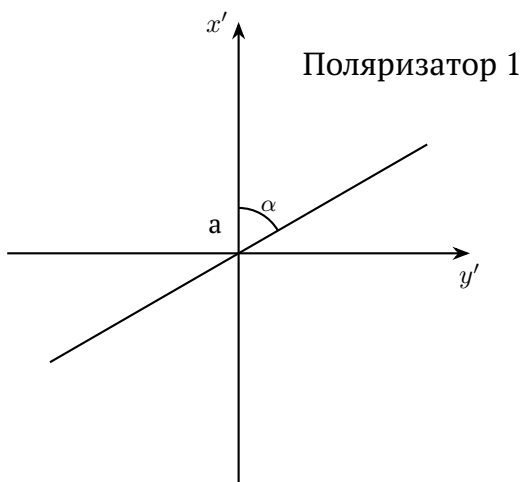
(a)

Road to IPhO



(b)

Вопрос С3 показывает, что фотон может разделиться на два фотона, которые при прохождении через точки a и b поляризованы в перпендикулярных направлениях. Эти два фотона называются a - и b -фотонами, потому что если один фотон, проходящий через a (называемый a -фотон), поляризован в направлении \hat{x}' , то другой, который проходит через b (называемый b -фотон), будет поляризован в направлении $\hat{y}' \perp \hat{x}'$, и если a -фотон поляризован в \hat{y}' , то b -фотон будет поляризован в \hat{x}' . Запутанное состояние пары фотонов может быть получено экспериментально. Это суперпозиция двух вышеуказанных альтернативных состояний и может быть выражена как $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{x}'_a\rangle|\hat{y}'_b\rangle + |\hat{y}'_a\rangle|\hat{x}'_b\rangle)$. Здесь $|\hat{x}'_a\rangle|\hat{y}'_b\rangle$ представляет состояние когда a -фотон поляризован в направлении \hat{x}' и b -фотон поляризован в направлении \hat{y}' ; аналогичное значение имеет $|\hat{y}'_a\rangle|\hat{x}'_b\rangle$. Коэффициент $1/\sqrt{2}$ может рассматриваться как произведение амплитуд электрического поля (выраженное в соответствующих единицах) для a - и b -фотонов. Как показано на рис. 3, два линейных поляризатора 1 и 2 имеют оси пропускания под углами α и β соответственно относительно \hat{x}' . Мы можем использовать их для измерения совпадений двух фотонов, прошедших через a и b . Пусть вероятность одновременного обнаружения двух фотонов, проходящих через поляризаторы 1 и 2, равна $P(\alpha, \beta)$. Другими словами, $P(\alpha, \beta)$ можно также рассматривать как величину, пропорциональную произведению интенсивностей (после соответствующих суперпозиций) света, проходящего через два поляризатора. Обозначим $\alpha + \pi/2$ и $\beta + \pi/2$ как α_\perp и β_\perp соответственно.



С4 Рассмотрим полное электрическое поле, создаваемое линейными поляризаторами. Найдите вероятности $P(\alpha, \beta)$, $P(\alpha, \beta_\perp)$, $P(\alpha_\perp, \beta)$, и $P(\alpha_\perp, \beta_\perp)$. **0.8**

Road to IPhO

C5 Обозначим $\sigma_a = 1$ когда поляризатор 1 с углом α находит a -фотон и $\sigma_a = -1$ когда поляризатор 1 с углом α_{\perp} находит a -фотон. Аналогично, $\sigma_b = 1$ или -1 обозначают случаи когда поляризатор 2 с углами β или β_{\perp} находят b -фотон. **0.5**

Если $E(\alpha, \beta)$ обозначает среднее от $\sigma_a \sigma_b$, то величина $S = |E(\alpha, \beta) - E(\alpha, \beta')| + |E(\alpha', \beta) - E(\alpha', \beta')|$ имеет чрезвычайно важное значение. Для классической теории света $S \leq 2$. Это одна из формулировок неравенства Белла (CHSH-неравенства, полученного Клаузером, Хорном, Шимони и Хольтом).

Получите выражение для S и вычислите S для случая $\alpha = \frac{\pi}{4}, \alpha' = 0, \beta = -\frac{\pi}{8}, \beta' = \frac{\pi}{8}$.

Укажите, согласуется ли результат для S с классической теорией.