

Road to IPhO

Гироскопические силы и паразитное трение

Гироскопические силы являются причинами ряда интересных явлений. Например, сила Кориолиса приводит к размыванию берегов рек, сила Лоренца приводит к искривлению траекторий движения частиц, к прецессии атомов в магнитном поле и т.д.

Помимо гироскопических сил, интересными для изучения являются паразитные виды трения — трение качения и трения верчения, возникающие при качении и верчении тел на поверхности.

В данной задаче также изучается влияние магнитного поля и паразитных видов трения на механическое движение.

Часть А. Взаимодействие вращающегося шара с магнитным полем (1.5 балла)

Как известно, момент сил, действующих на виток с током со стороны однородного магнитного поля, не равен нулю. Рассмотрим шар радиусом r с неподвижным центром, заряженный равномерно по объёму зарядом q и вращающийся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} . Вращающийся шар эквивалентен набору круговых токов.

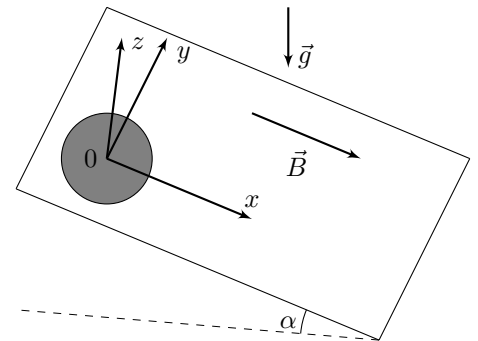
A1 Рассмотрим кольцо, заряженное равномерно по периметру зарядом Q и вращающееся вокруг своей оси с угловой скоростью Ω . Найдите эквивалентную силу тока i в кольце. **0.3**

A2 Определите магнитный момент шара \vec{m} . Ответ выразите через $\vec{\omega}$, q и r . **1.0**

A3 Найдите момент сил \vec{M} , действующих на шар, относительно его центра. Ответ выразите через $\vec{\omega}$, \vec{B} , q и r . **0.2**

Далее во всех пунктах задачи изучается движение однородного шара радиусом r и массой m , заряженного равномерно по объёму **положительным** зарядом q . Шар без проскальзывания движется по плоскости, образующей угол α с горизонтом, вдоль которой направлено однородное магнитное поле индукции \vec{B} . Ускорение свободного падения равно \vec{g} .

На приведённом рисунке показана система координат xyz с единичными ортами \vec{e}_x , \vec{e}_y и \vec{e}_z такими, что орт \vec{e}_y направлен горизонтально, а вектор индукции магнитного поля записывается как $\vec{B} = \vec{e}_x \cdot B$.



Часть В. Идеализированное движение (5.0 балла)

Введём обозначения:

1. \vec{r} — радиус-вектор, проведённый из центра шара в его точку касания с плоскостью;
2. \vec{v}_C — скорость центра шара;
3. \vec{a}_C — ускорение центра шара;
4. $\vec{\omega}$ — угловая скорость шара;
5. $\dot{\vec{\omega}}$ — угловое ускорение шара;
6. I — момент инерции шара относительно оси, проходящей через диаметр;
7. \vec{L}_C — момент импульса шара относительно центра масс;
8. \vec{F} и \vec{N} — силы трения и нормальной реакции соответственно, действующие на шар со стороны плоскости.

В момент времени $t = 0$ шар неподвижен, а его центр расположен в начале координат.

B1 Запишите условие отсутствия проскальзывания шара по плоскости через \vec{v}_C , $\vec{\omega}$ и \vec{r} . Используя полученное выражение, выразите компоненты угловой скорости ω_x и ω_y через v_{Cx} , v_{Cy} и r . Дифференцируя по времени условие отсутствия проскальзывания, выразите \vec{a}_C через $\dot{\vec{\omega}}$ и \vec{r} . **0.5**

Road to IPhO

Поскольку момент инерции I шара одинаков для любой оси, проходящей через центр, вектор его момента импульса относительно центра масс записывается в виде:

$$\vec{L}_C = I\vec{\omega}$$

B2 Используя уравнение динамики вращательного движения относительно центра масс, выразите угловое ускорение шара $\vec{\omega}$ через q , m , r , $\vec{\omega}$, \vec{r} , \vec{B} и \vec{F} . **0.2**

B3 Выразите силу трения \vec{F} через m , q , \vec{B} , $\vec{\omega}$, \vec{r} и \vec{a}_C . *Примечание:* Воспользуйтесь свойством двойного векторного произведения: **0.2**

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Из уравнения динамики вращательного движения видно, что при движении шар начинает вертеться (вращаться относительно оси z , перпендикулярной плоскости).

B4 Найдите компоненту угловой скорости шара ω_z в точке с координатой x_C его центра. Ответ выразите через q , m , B , r и x_C . **0.8**

Перейдём к анализу траектории центра шара. Далее во всех пунктах изначально шар неподвижен, а его центр расположен в начале координат.

B5 Докажите, что траектория центра шара является прямолинейной. **0.4**

B6 Найдите проекцию ускорения центра a_{Cx} шара на ось x в зависимости от положения его центра x_C . **0.5**

B7 Определите зависимость координаты x_C центра шара от времени t . Ответ выразите через g , α , q , m , B и t . **0.7**

Проанализируем кинематику данного движения.

B8 Опишите эволюцию угловой скорости шара $\vec{\omega}$. В качестве ответа укажите годограф вектора угловой скорости (в системе координат xyz), т.е. кривой, описывающей положения конца вектора при его фиксированном начале. Укажите на рисунке все характерные значения. Выразите их через m , g , q , B , α и r . **0.5**

B9 Найдите максимальную скорость v_{max} среди всех элементов шара в момент, когда скорость центра достигает своего максимума. Ответ выразите через m , g , q , B и α . **0.6**

Перейдём к необходимым условиям движения шара без проскальзывания.

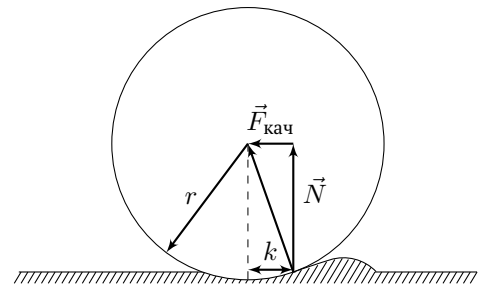
B10 При каком минимальном коэффициенте трения μ_{min} шара о плоскость возможно движение без проскальзывания? Ответ выразите через g , α , q , m и B . **0.6**

В действительности, на движение шара влияют сразу два вида паразитного трения - трение качения и трение верчения. В двух следующих частях независимо изучаются влияния данных эффектов на движение шара.

Часть С. Трение качения (2.5 балла)

Причиной возникновения сопротивления качению шара является неровность поверхности. Смоделировать эффект трения качения можно следующим образом: шар также движется по поверхности без проскальзывания, а эффективная точка приложения силы нормальной реакции приобретает плечо k относительно точки касания шара с плоскостью (см.рис). При этом перераспределённая сила нормальной реакции даёт нулевой момент относительно центра шара и в силу своей природы никак не влияет на силу трения покоя или скольжения. Плечо k всегда предполагается малым по сравнению с r , поэтому для силы трения качения $\vec{F}_{кач}$ можно написать:

$$\vec{F}_{кач} = -\vec{e}_{vC} \cdot \frac{kN}{r}$$



Road to IPhO

где \vec{e}_{v_C} — единичный вектор, направленный вдоль скорости центра шара. Будем считать коэффициент k постоянным и не зависящим от направления скорости центра.

В момент времени $t = 0$ шар неподвижен, а его центр расположен в начале координат.

C1 Определите расстояние $S_{i,i+1}$ между положениями центра шара в моменты i -й и $(i+1)$ -й остановок. Ответ выразите через i, g, k, α, q, m и B . **0.8**

C2 Определите диапазон возможных положений x_{CK} последней остановки центра шара. Ответ выразите через g, k, α, q, m и B . **0.2**

Далее считайте, что $\operatorname{tg} \alpha \gg k/r$.

C3 Найдите время τ движения шара. Ответ выразите через g, k, α, q, m и B . **0.5**

C4 Какое количество теплоты Q выделилось при движении шара? Ответ выразите через g, k, α, q, m и B . **1.0**

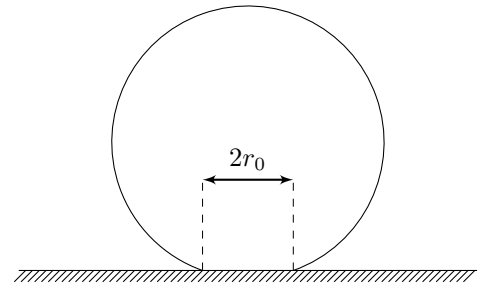
Часть D. Трение верчения (3.0 балла)

Трение верчения возникает вследствие неточечного контакта шара с плоскостью. Будем считать, что шар контактирует с плоскостью в области круга радиусом $r_0 \ll r$, по площади которого равномерно распределена сила нормальной реакции N . Коэффициент трения скольжения шара по поверхности равен μ .

Примечание 1: Вообще говоря, величина r_0 определяется силой нормальной реакции N , но при решении задачи находить связь r_0 и N не нужно.

Примечание 2: В данной части задачи под отсутствием проскальзывания подразумевается, что центр круга соприкосновения шара и плоскости всегда неподвижен. Считайте, что сила трения покоя приложена к центру круга соприкосновения.

В момент времени $t = 0$ шар неподвижен, а его центр расположен в начале координат.



D1 Определите модуль момента силы трения верчения M' . Ответ выразите через μ, m, g, α и r_0 . **0.4**

D2 В какой момент времени t_1 шар начнёт вертеться? Ответ выразите через μ, r_0, m, q, B, r и α . **0.5**

D3 Постройте качественный график $\omega_z(t)$. На графике укажите все характерные значения, особенности и асимптоты. Выразите характерные значения через m, g, α, q, B и r . **1.5**

D4 Постройте качественный график $x_C(t)$. На графике укажите все характерные значения, особенности и асимптоты. Характерные значения могут быть выражены через введённые вами переменные. **0.6**