

# Road to IPhO

## Планетарная газовая туманность

Планетарная газовая туманность – это облако газа, удерживаемое силами тяготения ее «ядра» (обычно это достаточно массивная звезда). Если это облако достаточно велико, то мы не видим саму звезду – испускаемый ею свет многократно рассеивается на частицах газа, поглощается ими и затем переизлучается. Поэтому в телескопы мы видим свечение всей туманности. В данной задаче нужно изучить связь между излучением туманности, которое видит внешний наблюдатель, и исходным излучением звезды-ядра. На самом деле в состав подобных туманностей входят различные газы, но больше всего в них содержится водорода. Поэтому мы рассмотрим туманность, состоящую только из атомарного водорода со средней плотностью  $\bar{\rho} = 10^{-20}$  г/см<sup>3</sup>, внешний радиус которой равен  $R = 10^{17}$  см, а внутренний (равный, естественно, радиусу звезды-ядра)  $r_0 = 10^{10}$  см. Приведем также значения физических постоянных, которые могут понадобиться Вам при решении данной задачи:

- скорость света в вакууме  $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с;
- элементарный заряд  $e \approx 1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл;
- масса электрона  $m_e \approx 9 \cdot 10^{-31}$  кг;
- постоянная Планка  $h \approx 6.6 \cdot 10^{-34}$  Дж · с;
- электрическая постоянная  $\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м;
- число Авогадро  $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>;
- постоянная Больцмана  $k \approx 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К.

Для вычислений вам могут оказаться полезными следующие интегралы:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}.$$

При  $b > 4$  можно использовать приближенные формулы:

- $\int_b^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \approx (b + 1)^3 \cdot e^{-b}$  с относительной ошибкой порядка  $\frac{3}{(b + 1)^2}$ ;
- $\int_b^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx \approx (b + 1)^2 \cdot e^{-b}$  с относительной ошибкой порядка  $\frac{1}{(b + 1)^2}$ .

### Часть А. Излучение звезды и температура газа в туманности (1 балл)

Несмотря на яркое свечение, звёзды с хорошей точностью можно считать «абсолютно черными телами» – так в физике называют объекты, поглощающие практически всё падающее на них электромагнитное излучение. Нагретые «абсолютно черные тела» сами испускают электромагнитное излучение, спектр которого впервые удалось описать М. Планку, который применил постулат о **квантовании энергии** излучения. Согласно этому постулату, при взаимодействии с атомами и молекулами вещества электромагнитное излучение ведет себя как поток **фотонов**, энергия каждого из которых связана с частотой волны  $\nu$  следующим образом:  $E_\gamma = h \cdot \nu$ . Планк показал, что если излучение, частота которого лежит в узком интервале  $(\nu, \nu + d\nu)$ , находится в равновесии с «абсолютно черным телом» при постоянной температуре  $T$ , то объемная плотность энергии этого излучения равна  $dW = w(\nu) d\nu$ . В последней формуле фигурирует **спектральная плотность** энергии излучения  $w(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$  – это так называемое распределение Планка. Полная мощность излучения с единицы площади поверхности такого тела (энергия  $\Delta E_{\text{rad}}$ , излучаемая единицей площади за единицу времени) называется полным потоком энергии и может быть найдена из закона Стефана–Больцмана:  $J = \frac{\Delta E_{\text{rad}}}{\Delta S \Delta t} = \sigma \cdot T^4$ . Здесь  $\sigma \approx 5.67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup> · К<sup>4</sup>) – постоянная Стефана–Больцмана.

# Road to IPhO

**A1** Выразите постоянную Стефана–Больцмана через скорость света в вакууме  $c$ , постоянную Планка  $h$  и постоянную Больцмана  $k$ . **0.5**

**A2** Предположим, что все газовое облако находится в тепловом равновесии с фотонным газом, испускаемым звездой. Найдите для этого случая зависимость температуры газа от расстояния  $r$  до центра звезды при  $r \gg r_0$ . В качестве ответа запишите формулу для отношения  $T(r)/T_0$ , где  $T_0$  – температура поверхности звезды-ядра. **0.5**

## Часть В. Атом водорода (1.4 балла)

Взаимодействие атома водорода с фотонами описывается на базе постулатов Бора. Среди состояний электрона вблизи ядра существуют **стационарные** состояния, в которых электрон не обменивается энергией с полем излучения. Поглощение или испускание фотонов происходит при переходе электрона из одного стационарного состояния в другое. По теории Бора, энергии стационарных «связанных» состояний (энергетические уровни электрона в атоме водорода) можно найти с помощью анализа «волновых свойств» электрона: на классической траектории электрона, отвечающей одному из стационарных состояний, должно укладываться целое число длин волн де Бройля  $\lambda_e = \frac{h}{p_e}$ , где  $p_e$  – импульс электрона. При этом другие значения энергии для электрона полностью запрещены – электрон с «запрещенной» энергией при взаимодействии с ядром перейдет в одно из стационарных состояний, обменявшись энергией с другими объектами – например, испустив фотон.

**B1** Рассмотрите круговые орбиты электрона в атоме водорода, на которых укладываются  $n = 1, 2, \dots$  длин волн де Бройля, и вычислите энергию  $n$ -ого уровня (в ответе приведите формулу; при ее получении считайте, что потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром равна нулю при бесконечном удалении их друг от друга). **0.2**

**B2** Какой минимальной энергией должен обладать фотон, который может ионизировать атом водорода, находящийся в состоянии с минимальной энергией? Эту величину называют энергией (порогом) ионизации атома водорода. Ответ запишите в электронвольтах (эВ). 1 эВ – единица измерения энергии, численно равная работе электростатических сил при перемещении электрона между точками с разностью потенциалов 1 В. **0.2**

Мы знаем, что теория Бора лишь приближенно описывает квантовые системы. Однако для уровней энергии атома водорода она по удачному стечению обстоятельств дает ответ, совпадающий с точным ответом, полученным с помощью современной квантовой теории. Этот ответ хорошо согласуется с экспериментальными данными. Состояние с минимальной энергией ( $n = 1$ ) называют основным, а состояния с  $n > 1$  – возбужденными. Время жизни атома в возбужденном состоянии (то есть время нахождения электрона в стационарном состоянии с  $n > 1$ ) не превышает  $10^{-8}$  с. Затем электрон переходит в одно из ниже лежащих стационарных состояний, испуская фотон. Наибольшую вероятность имеет переход на соседний энергетический уровень ( $|\Delta n| = 1$ ), переходы с  $|\Delta n| > 1$  менее вероятны.

**B3** Допустим, что водород находится в равновесии с излучением звезды, температура поверхности которой примерно равна  $T_0 = 30000$  К. Укажите номер энергетического уровня, на котором должны преимущественно находиться атомы водорода, если они расположены на расстоянии  $r \gg r_0$  от звезды? Оцените (в процентах, с точностью до целого значения) долю атомов, находящихся в возбужденных состояниях при  $r = 10^5 r_0$ . **0.5**

**B4** Какую примерно часть от общего потока энергии излучения звезды составляет поток энергии фотонов, способных ионизировать атомы водорода в туманности, если температура поверхности звезды-ядра равна  $T_0 = 30000$  К? Ответ запишите в процентах. **0.5**

# Road to IPhO

## Часть С. Излучение туманности (7.6 балла)

На самом деле даже в стационарной туманности водород не будет находиться в равновесии с излучением звезды – он будет «перерабатывать» это излучение. Основным механизмом «переработки» будет поглощение фотонов с энергией выше порога ионизации. В результате в туманности будет существовать некоторая примесь свободных электронов и протонов (ионов  $H^+$ ). При столкновениях протонов и электронов будут вновь образовываться нейтральные атомы водорода, но уже в возбужденных состояниях. Количество столкновений электронов и ионов в единицу времени пропорционально произведению их концентраций. В результате таких столкновений обычно образуются атомы водорода в разных возбужденных состояниях с достаточно большими  $n$  («захваты» электронов в состояния с  $n = 1, 2$  происходят очень редко). Электроны из этих возбужденных состояний будут за несколько «шагов» переходить в основное состояние, излучая фотоны из спектра атома водорода. Ясно, что эти частоты будут меньше частоты фотона, поглощенного атомом при ионизации. Аналогично атом водорода может поглощать фотоны, переходя в возбужденное состояние (для этого энергия фотона должна быть с высокой точностью равна разности энергий соответствующих уровней), из которого он также постепенно возвращается в основное состояние. Итак, туманность будет поглощать высокоэнергетичные фотоны, «превращая» каждый из них в несколько фотонов с более низкими энергиями. Нужно отметить, что разброс частот фотонов, излучаемых при одном и том же переходе, очень мал – для условий планетарной газовой туманности он составляет менее сотой доли процента от частоты перехода  $\nu_{n \rightarrow n'} = \frac{E_n - E_{n'}}{h}$ . Для дальнейшего отметим, что фотоны, испускаемые в переходах с уровней с  $n > 1$  на уровень с  $n' = 1$ , называют «лаймановскими» (соответствующие спектральные линии составляют так называемую **серию Лаймана**), а испускаемые при переходах с уровней с  $n > 2$  на уровень с  $n' = 2$  – «бальмеровскими» (линии принадлежат **серии Бальмера**). Фотоны, энергии которых ниже порога ионизации и не равны разности энергий двух стационарных состояний, в основном испытывают почти упругое рассеяние на атомах водорода – их частота почти не изменяется.

**C1** Вероятность ионизации атома водорода в основном состоянии фотоном с энергией выше порога ионизации характеризуют величиной **сечения фотоионизации**. Эта величина имеет размерность площади и равна отношению количества фотонов, поглощаемых одним атомом за единицу времени, к плотности потока налетающих фотонов (то есть к числу налетающих фотонов, проходящих через единицу площади волнового фронта за единицу времени). Пусть эта величина для фотонов с энергиями вблизи порога ионизации равна  $\sigma_i \approx 10^{-17} \text{ см}^2$ . Оцените длину свободного пробега фотона с энергией выше порога ионизации (расстояние, которое он в среднем пролетит в веществе туманности до поглощения) в области, где плотность водорода равна средней плотности  $\bar{\rho}$ . Ответ запишите в сантиметрах. **0.5**

**C2** Какая часть испущенных звездой фотонов, имеющих энергию выше порога ионизации водорода из основного состояния, будет «переработана» туманностью в фотоны с более низкими энергиями? Ответ дайте в процентах, с точностью до целого значения. **0.5**

**C3** Пусть  $\Delta N$  – количество испускаемых звездой за время  $\Delta t$  фотонов с энергией выше порога ионизации водорода из основного состояния,  $\Delta N_{21}$  – количество выходящих за то же время  $\Delta t$  из туманности фотонов с частотами спектральной линии, соответствующей переходу ( $n = 2$ )  $\rightarrow$  ( $n' = 1$ ) (это «основная» линия серии Лаймана), а  $\Delta N_B$  – общее количество «бальмеровских» фотонов, выходящих из туманности за то же время  $\Delta t$ . Найдите примерно соотношение  $\Delta N_{21} : \Delta N_B : \Delta N$ . **1.2**

**C4** Внешний наблюдатель исследует спектр излучения нашей туманности. Изобразите на рисунке (качественно) график регистрируемого им спектра (то есть нарисуйте ход зависимости  $dI/d\nu \equiv s(\nu)$ , где  $dI$  – интенсивность регистрируемого излучения, приходящегося на интервал частот  $d\nu$ ). Укажите на графике его основные особенности. **1.0**

**C5** Наблюдатель установил, что интенсивность излучения туманности на частоте основной спектральной линии серии Лаймана  $\nu_{21}$  составляет 10% от интенсивности излучения туманности в диапазоне частот  $2\nu_{21}/3 \leq \nu \leq \nu_{21}$  (если в последней суммарной интенсивности не учитывать излучение на частоте самой спектральной линии). Чему равна температура  $T_x$  поверхности звезды-ядра в наблюдаемой туманности? В качестве первого ответа приведите полученное Вами уравнение для определения  $T_x$  (это должно быть алгебраическое уравнение, не содержащее других неизвестных величин, кроме  $T_x$ ). В качестве второго ответа на данный вопрос приведите полученное в результате численного решения этого уравнения значение  $T_x$  в кельвинах, с ошибкой не более 500 К. **2.2**

# Road to IPhO

Теперь нам ясно, что часть водорода в туманности будет находиться в ионизированном состоянии. Интересно выяснить, как зависит степень ионизации газа (отношение количества ионизированных атомов к полному количеству атомов) от расстояния до поверхности звезды. Для упрощения анализа Вам предлагается использовать модель, согласно которой в области с заметной ионизацией выполняются два предположения:

- убывание потока фотонов с энергиями выше порога ионизации водорода происходит в основном за счет их поглощения нейтральными атомами (а не за счет увеличения площади, по которой они распределяются);
- плотность водорода изменяется (при изменении указанного расстояния) значительно медленнее, чем степень ионизации, так что плотность можно считать примерно равной средней плотности туманности.

Также используйте информацию из введения к части С.

**С6** Предположим, что степень ионизации водорода вблизи поверхности звезды очень высока и равна 99%. На каком расстоянии  $l_1 \equiv r_1 - r_0$  от поверхности звезды степень ионизации станет равна 90% (первый ответ –  $l_1$ ), 50% (второй ответ –  $l_2$ ), 10% (третий ответ –  $l_3$ )? Все три ответа запишите в см. **2.2**