Road to IPhO

Справочные материалы и тренировочные задания к задаче «Кубиты и фотоны»

Дорогие участники олимпиады! Внимательно прочитайте представленные здесь сведения и выполните тренировочные задания под контролем лидеров ваших команд. Это может помочь вам при решении задачи Т3 на олимпиаде.

Этими материалами будет можно пользоваться во время теоретического тура олимпиады!

Вероятности и статистика

При изучении сложных явлений мы довольно часто не можем точно предсказать исход того или иного события. Но при изучении большого количества таких событий можно использовать **статистический подход**. При таком подходе мы опираемся на понятие **вероятности** того или иного события. Для этого мы выделяем множество неких «элементарных» событий, которые обычно считаем **равновероятными**. Затем подсчитываем, какая доля от общего количества «элементарных» событий означает наступление исследуемого события. Именно ее мы и считаем вероятностью.

Например, рассмотрим бросание на стол однородного кубика с шестью гранями, пронумерованными цифрами от 1 до 6. Рассчитать результат одного броска (то есть указать, какая цифра окажется сверху, когда кубик остановится) очень сложно. Но можно заметить, что одно бросание кубика может привести к шести возможным результатам (то есть выпадение каждого из чисел мы считаем «элементарным» событием), и, если они равновероятны, то выпадение каждого числа происходит с вероятностью $w = 1/6$. Умножив вероятность на количество попыток N, мы получаем **математическое ожидание** числа произошедших событий wN (или среднее число «успехов» в серии из N испытаний). Конечно, это не означает, что при $N = 6$ бросках кубика обязательно выпадет одна цифра 1 – это означает, что при очень большом числе бросков N число выпадений 1 будем тем ближе к $N/6$, чем больше N.

Математики доказали, что при проведении серии из N независимых испытаний с вероятностью успеха w **стандартное отклонение** числа успехов (то есть корень квадратный из среднего квадрата отклонения от этого среднего) равно $\Delta N = \sqrt{Nw(1-w)}$. Как видно, для числа выпадений 1 при 6 бросках $N_1 \approx 1.0 \pm 0.9$ (относительная ошибка близка 90%!), а при 60000 бросках $N_1 \approx 10000 \pm 91$ (относительная ошибка менее 1%).

Пусть кубик бросается два раза. Как найти вероятность того, что при первом бросании выпадет цифра 1, а при втором – цифра 2? Эта вероятность вычисляется исходя из того, что это один вариант выпадения цифр из 36 возможных в двух независимых бросках – мы обнаруживаем, что вероятность осуществления двух независимых событий вместе равна произведению вероятностей осуществления каждого из них.

A1 Вычислите вероятность того, что в серии из 6 бросков кубика цифра 1 выпадет более одного раза.

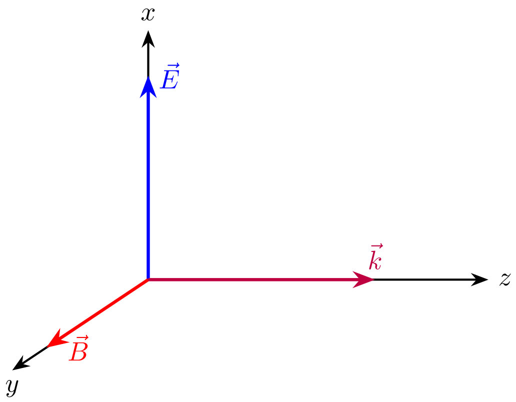
Биты и кубиты

Бит – это не только единица измерения информации. С точки зрения физики так часто называют любую **классическую** систему с двумя состояниями. Например, простой проводящий контур с источником тока и ключом. При замкнутом ключе ток в контуре течет (состояние 1), при разомкнутом – не течет (состояние 0). Взяв набор контуров, можно, замыкая и размыкая ключи, «записать» любой двоичный код – последовательность нулей и единиц.

Кубит (**квантовый бит**) – это **квантовая** система с двумя базисными состояниями, которые мы обозначим $|0$ и $|1$. Одно из основных отличий кубита от бита состоит в том, что квантовые объекты могут находиться в состоянии **суперпозиции**: кроме базисных состояний у системы будет еще и бесконечное количество других возможных состояний, каждое из которых является их линейной суперпозицией (смесью). Второе важное отличие состоит в том, что связь состояния квантовой системы и результатов производимых над ней **измерений** имеет **вероятностный** характер: если у бита (проводящего контура) измерить «наличие тока», то измерения в состоянии 1 **всегда** покажут наличие тока, а в состоянии 0 – **всегда** отсутствие тока, и других вариантов быть не может. У кубита, находящегося в состоянии суперпозиции базисных состояний $|0$ и $|1$, результаты измерений с некоторой вероятностью w_0 будут соответствовать состоянию $|0$, и с некоторой вероятностью w_1 – состоянию $|1$. Так как других базисных состояний нет, то одна из этих вероятностей реализуется обязательно, то есть $w_0 + w_1 = 1$.

Фотоны как кубиты

Согласно квантовой теории света, его можно рассматривать как совокупность дискретных «порций» энергии электромагнитного поля – **фотонов**. Чтобы описать состояние отдельного фотона, нужно задать его частоту v и направление движения (например, единичным вектором $\vec{n}$), а также его **состояние поляризации**. Частоту и направление движения можно задать вместе с помощью **волнового вектора** $\vec{k} \equiv 2\pi\vec{n}/\lambda = 2\pi v\vec{n}/c$ (здесь λ – длина волны, а c – скорость света). Волновой вектор определяет импульс $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ и энергию $\mathcal{E} = hv = \hbar c|\vec{k}|$ фотона (здесь $\hbar \equiv h/2\pi \approx 1.05 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с – постоянная Планка). При каждом значении $\vec{k}$ у **классической** электромагнитной волны есть **два** независимых состояния поляризации. Они соответствуют двум возможным взаимно перпендикулярным направлениям вектора $\vec{E}$ напряженности электрического поля в волне (в плоскости, перпендикулярной $\vec{k}$). Например, если $\vec{k}$ направлен вдоль оси z, то такая волна может иметь два независимых (базисных) состояния поляризации вдоль осей x и y.



Конечно, у волны могут быть и другие состояния поляризации, но их можно получить при помощи наложения (**суперпозиции**) базисных состояний. Отметим, что при составлении суперпозиции мы можем строить не только другие **линейные** поляризации (для них вектор $\vec{E}$ в волне направлен вдоль оси, отличающейся от x и y, а проекции $\vec{E}$ на базисные оси имеют разные значения, но колеблются **синфазно**). Путем суперпозиции можно получить также **круговые** или **эллиптические** поляризации, при которых проекции вектора $\vec{E}$ на базисные оси совершают колебания со сдвигом по фазе относительно друг друга.

Оказывается, что у отдельного фотона тоже могут быть поляризационные состояния. Для фотона с волновым вектором $\vec{k} = k \cdot \vec{e}_z$ также возможны **два** независимых состояния поляризации: $|x$ и $|y$. При этом классическая гармоническая электромагнитная волна, поляризованная вдоль оси x, состоит из большого числа фотонов в состоянии $|x$. Таким образом, если волновой вектор фотона известен (мы направляем вдоль $\vec{k}$ ось z), и в опытах с этим фотоном мы измеряем только величины, связанные с поляризацией, то можно считать фотон кубитом с базисными состояниями $|x$ и $|y$. Кроме того, у фотона могут быть состояния, являющиеся суперпозициями базисных. Для этих состояний измерение поляризации фотона должно с вероятностью w_x обнаруживать поляризацию вдоль оси x, и с вероятностью $w_y = 1 - w_x$ – поляризацию вдоль оси y.

Комплексные числа

Если задаться целью научиться извлекать квадратные корни из отрицательных чисел, можно определить мнимую единицу $i \equiv \sqrt{-1}$, а вслед за ней – множество комплексных чисел $z = x + iy$. В этой записи x и y – два вещественных числа, называемых вещественной и мнимой частью комплексного числа z: $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$. Комплексные числа можно перемножать и делить друг на друга, получая снова комплексные числа. Эти операции определяются следующими формулами:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Вообще, с комплексными числами можно проводить любые алгебраические операции. Можно определить на множестве комплексных чисел многие известные вам функции. Например, для экспоненты справедлива **формула Эйлера**:

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot [\cos\cos(y) + i \cdot \sin(y)]$$

Комплексное число $z^* \equiv x - iy$ называют сопряженным к числу z. Вещественная неотрицательная величина $|z| \equiv \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется **модулем** комплексного числа. С помощью определения **фазы** φ комплексного числа

$$\left\{\cos(\varphi) \equiv \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin(\varphi) \equiv \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$$

можно ввести запись комплексного числа, представленного в экспоненциальной форме $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$.

A2 Представьте комплексное число $4 + 3i$ в экспоненциальной форме.

A3 Вычислите $\sqrt{1 + i\sqrt{3}}$.

Матрицы

Будем называть матрицами $(n \times m)$ прямоугольные таблицы, состоящие из n строк и m столбцов. Например матрица (2×1) – это «двухкомпонентный» столбец $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, матрица (1×2) – «двухкомпонентная» строка $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$, а матрица (2×2) – квадратная матрица $\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Научимся перемножать матрицы: это делается по правилу «строка на столбец»: произведение матрицы $\hat{A}$ размером $(n \times m)$ на матрицу $\hat{B}$ размером $(m \times l)$ равно матрице $\hat{C}$ размером $(n \times l)$, элементы которой $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}$. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Обратите внимание на то, что перемножать можно не любые матрицы – число столбцов в первой должно равняться числу строк во второй! Сопряженной к данной матрице $\hat{A}$ назовем матрицу $\hat{A}^\dagger$, получаемую перестановкой строк и столбцов и сопряжением всех комплексных чисел:

$$\hat{A}^\dagger \equiv \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}.$$

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 3 & -4i \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2i & 4i \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 8i \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -8i \end{pmatrix}.$$

A4 Вычислите $\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 3i & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -i \\ -3i & 2 \end{pmatrix}$.

A5 Вычислите $\begin{pmatrix} 3i & 3 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \end{pmatrix}$.

Поляризации фотонов

Теперь мы готовы описывать поляризационные состояния фотонов как состояния кубита. Договоримся сопоставить состоянию $|x$ фотона двухкомпонентный столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а состоянию $|y$ – двухкомпонентный столбец $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда произвольная суперпозиция этих состояний описывается столбцом $\alpha(10) + \beta(01) = (\alpha\beta)$, в котором комплексные числа α и β связаны **условием нормировки** $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Это условие имеет физический смысл, так величину $|\alpha|^2 \equiv w_x$ мы считаем вероятностью того, что при измерении поляризации фотона в состоянии суперпозиции будет обнаружено, что он поляризован вдоль оси x, и соответственно величину $|\beta|^2 \equiv w_y$ – вероятностью того, что будет обнаружена поляризация вдоль оси y. Отметим, что числа α и β должны быть именно комплексными потому, что двух вещественных чисел недостаточно для того, чтобы корректно описать наблюдаемые физические явления с участием фотонов.

Множество всех столбцов можно считать двумерным векторным пространством (конечно, необычным: нельзя забывать, что «координаты» α и β в этом пространстве – комплексные числа!). Можно определить в этом пространстве **скалярное произведение** двух «векторов» как

$$\langle 2\rangle \equiv \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\end{pmatrix}^\dagger \cdot \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1^* & \beta_1^*\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix} = \alpha_1^*\alpha_2 + \beta_1^*\beta_2.$$

Полезно обратить внимание следующие обстоятельства:

1. базисные состояния ортогональны (их скалярное произведение равно нулю $\langle y\rangle = 0$);
2. условие нормировки можно сформулировать как требование, что скалярный квадрат «вектора» равен единице;
3. вероятности можно записывать как квадраты модулей скалярных произведений: например, $w_x = \left|\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right|^2$.

Состояния кубита, описываемые двухкомпонентными столбцами, принято называть **«чистыми»** состояниями. В самом общем случае вероятность того, что кубит, находящийся в чистом состоянии $|1$, при измерении будет обнаружен в чистом состоянии $|2$, равна $w_{21} = |\langle 1\rangle|^2$. Отметим важное обстоятельство: никакие вероятности, вычисляемые по этой формуле, для нашего чистого состояния не изменятся, если столбец умножить на комплексное число вида $e^{i\varepsilon}$ (с любым вещественным ε). Кроме того, при этом остается справедливым и условие нормировки (оба факта следует из того, что $\left|e^{i\varepsilon}\right|^2 = \cos^2(\varepsilon) + \sin^2(\varepsilon) = 1$). Поэтому, экспериментально изучая однофотонное чистое состояние, невозможно установить его «общую фазу». Значит, ее можно выбрать произвольно – например, так, чтобы в столбце число α было вещественным и положительным, и, без ограничения общности, можно считать, что столбец, описывающий некоторое чистое состояние, имеет вид $(\alpha|\beta|\cdot e^{i\varphi})$.

A6 Фотон находится в чистом состоянии $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ (1-i)/2\end{pmatrix}$. Найти вероятность обнаружить его в чистом состоянии $\begin{pmatrix}2\sqrt{2}/3\\ i/3\end{pmatrix}$.

Тут самое время вспомнить, что в классической физике бывают не только поляризованные, но и неполяризованные электромагнитные волны. Мы их рассматриваем как смесь некогерентных волн со всеми возможными поляризациями. Могут ли существовать отдельные «неполяризованные фотоны»? Эксперимент показал, что фотоны **могут** находиться в состоянии, не обладающем вообще никакой определенной поляризацией. В таком состоянии при измерении любых величин, связанных с поляризацией, могут быть с равной вероятностью получены значения, отвечающие **любой** из линейных поляризаций (вдоль **любой** оси, перпендикулярной $\vec{k}$).

Аналогия с волнами тут не случайна: вообще все квантовые объекты обладают волновыми свойствами – с ними связывают **волны вероятности** нахождения их в том или ином состоянии. Эти волны тоже могут не быть когерентными, а в квантовой суперпозиции могут участвовать только когерентные волны. При потере **квантовой когерентности** получаются поляризационные состояния фотонов, которые нельзя описать **никаким** столбцом $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, так как столбцу соответствует наложение когерентных волн вероятности. Для некогерентных смесей приходится использовать другой объект - матрицу (2×2):

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix}\rho_{11} & \rho_{12}\\ \rho_{21} & \rho_{22}\end{pmatrix}.$$

Элементы этой матрицы подчинены следующим требованиям: $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$ и $\rho_{11}\cdot\rho_{22} > \rho_{12}\cdot\rho_{21}$; при этом ρ_{11} и ρ_{22} вещественны и положительны, а ρ_{12} и ρ_{21} – сопряженные по отношению друг к другу ($\rho_{21} = \rho_{12}^*$). Эти свойства подобраны для правильного описания физики: в частности $\rho_{11} = w_x$ и $\rho_{22} = w_y$, так что для вероятностей получаются положительные значения, в сумме равные 1 . Полностью неполяризованное состояние фотона отвечает $\hat{\rho}_{\text{пн}} = \begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$. Состояния кубита, которые нельзя описать двухкомпонентным столбцом, а только матрицей (2×2), принято называть «смешанным». В самом общем случае вероятность того, что кубит, находящийся в смешанном состоянии $\hat{\rho}$, при измерении будет обнаружен в чистом состоянии $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, равна $w = \begin{pmatrix}\alpha^* & \beta^*\end{pmatrix}\hat{\rho}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$.

A7 Укажите номера всех матриц 2×2, которые могут соответствовать смешанному поляризационному состоянию фотона:

1. $\begin{pmatrix} 3/5 & -i/2 \\ i/2 & 2/5 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1/4 & i/4 \\ -i/4 & 3/4 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1/3 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1/3 & -i/3 \\ -i/3 & 2/3 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} -1/3 & -i/3 \\ i/3 & 4/3 \end{pmatrix}$

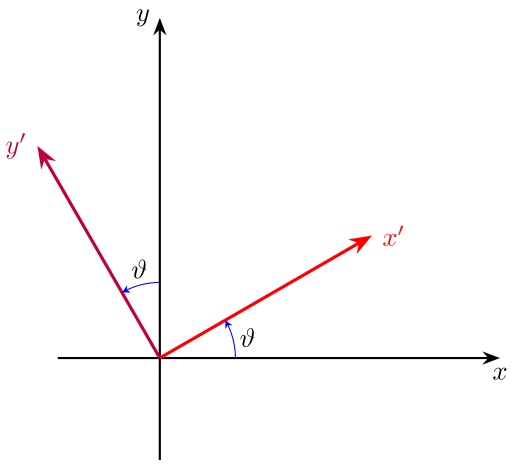
A8 Фотон находится в смешанном состоянии $\begin{pmatrix} 1/3 & -i/3 \\ i/3 & 2/3 \end{pmatrix}$. Найти вероятность обнаружить его в чистом состоянии $\begin{pmatrix} 2\sqrt{2}/3 \\ i/3 \end{pmatrix}$.

Эволюция и измерения

Разберем теперь действия, которые мы можем производить над поляризационным состоянием фотона. Они в действительности сводятся к двум возможностям:

1. мы можем поместить фотон в условия, в которых его поляризационное состояние будет определенным образом изменяться (**эволюционировать**);
2. мы можем произвести измерение некоторой физической величины, связанной с поляризацией.

Например, можно направить фотонный пучок в среду, которая поворачивает плоскость поляризации фотона на угол, пропорциональный длине пройденного пути. Как в этом случае будет изменяться поляризационное состояние? Если угол поворота $\vartheta(z) = kz$, то состояние $|x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ должно превратиться в состояние с поляризацией вдоль оси x' (см. рисунок), а состояние $|y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – в состояние с поляризацией вдоль оси y' (как обычно, положительным направлением вращения мы считаем направление против часовой стрелки).



Нетрудно понять, что «новые» состояния можно записать как комбинацию «старых»:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |x \to |x' = \cos(\vartheta)|x + \sin(\vartheta)|y = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |y \to |y' = \cos(\vartheta)|y - \sin(\vartheta)|x = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Видно, что этот переход можно описать как результат действия (то есть умножения) «матрицы поворота плоскости поляризации» на столбец, задающий начальное состояние:

$$\hat{U}(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix} = \hat{U}(\vartheta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} = \hat{U}(\vartheta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Значит, и для любой суперпозиции базисных состояний эволюция этой суперпозиции при прохождении среды, вращающей плоскость поляризации, будет описываться действием $\hat{U}(\vartheta)$ на столбец начального состояния. Точно так же для любой эволюции поляризационного состояния фотона существует соответствующая **матрица эволюции** $\hat{U}$, действие которой описывает данную эволюцию.

A9 Фотон находился в состоянии $\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4i/5 \end{pmatrix}$. Он прошел слой вещества, поворачивающего плоскость поляризации на $30°$ против часовой стрелки. С какой вероятностью этот фотон может быть обнаружен в состоянии, поляризованном вдоль оси y?

При измерении фотон взаимодействует с измерительным прибором, и это взаимодействие изменяет состояние фотона: прибор **«загоняет»** фотон в состояние с определенным значением измеренной величины (до измерения фотон мог и не иметь какого-либо определенного значения этой величины). Математическое описание процедуры измерения величин, связанных с поляризацией фотона, тоже производится с помощью матриц 2×2: каждому измерительному прибору соответствует такая **матрица «наблюдаемой»** $\hat{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$, что допустимые значения измеряемой величины F (их может быть не больше двух, так как у нас всего два независимых поляризационных состояния) определяются из уравнения

$$F^2 - (f_{11} + f_{22})\,F + f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} = 0 \qquad (1)$$

Множество допустимых значений «наблюдаемой» называется ее **спектром**. Отметим, что допустимые значения физической величины должны быть вещественны, и поэтому у матрицы «наблюдаемой» диагональные элементы (f_{11} и f_{22}) должны быть вещественными, а недиагональные – сопряженными ($f_{21} = f_{12}^*$). Состояния, в которых «наблюдаемая» имеет определенные значения, описываются нормированными столбцами, удовлетворяющими уравнению

$$\hat{F} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad (2)$$

(на самом деле, как нетрудно проверить, уравнение (1) – условие существования ненулевых решений уравнения (2)). Как видно, зная матрицу «наблюдаемой», можно с помощью (1) и (2) найти ее допустимые значения $F_{1,2}$ и состояния $|F_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ и $|F_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, в которых она их имеет с вероятностью 1 (100%). Для любого другого состояния $|\psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ (в котором эта «наблюдаемая» не имеет определенного значения) при ее измерении могут быть получены **те же** значения $F_{1,2}$ **с вероятностями** $w_{1,2} = |\langle\psi\rangle|^2$. Зная спектр «наблюдаемой» $F_{1,2}$ и состояния $|F_{1,2}$, можно построить ее матрицу с помощью формулы **спектрального разложения**

$$\hat{F} = F_1 \cdot |F_1|\,F_1^\dagger + F_2 \cdot |F_2|\,F_2^\dagger \qquad (3)$$

A10 Можно изготовить прибор, измеряющий «долю x-поляризованного света» w_x (ясно, что таким прибором является поляроид, пропускающий только фотоны, поляризованные вдоль оси x). Для одиночного фотона эта величина может принимать значения 1 (в состоянии $|x$) и 0 (в состоянии $|y$), а для других состояний $|\psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ она не имеет определенного значения – ее измерение каждый раз будет давать либо 1, либо 0, и эти значения будут выпадать с вероятностями $w_x = |\alpha|^2$ и $w_y = |\beta|^2 = 1 - w_x$. Постройте матрицу этой «наблюдаемой».

Важно понимать, что измерение «безвозвратно» изменяет состояние кубита – после него мы уже с достоверностью знаем, что кубит находится в конкретном базисном состоянии. Разберем, как это влияет на «волны вероятности». Например, если фотон в чистом состоянии падает на полупрозрачное зеркало, которое не разрушает квантовой когерентности (оставляет его в чистом состоянии), но с вероятностью 50% пропускает его, и с вероятностью 50% отражает – это означает, что «волна вероятности» разделилась на прошедшую и отраженную, то есть фотон теперь «вероятностно» существует с обеих сторон зеркала. Если за зеркалом и перед ним стоят детекторы фотонов, то в момент взаимодействия фотона с детектором, в результате которого детектор сообщает наблюдателю, где оказался фотон, происходит «коллапс» волны вероятности - если сработал детектор за зеркалом, то волна вероятности нахождения фотона перед зеркалом мгновенно «исчезла» – теперь вероятность увидеть его перед зеркалом стала равна нулю.

Желаем вам интересной и успешной работы на олимпиаде!