

# Road to IPhO

## Прецессия земной оси

### Введение

Прецессией земной оси называется её вращение вокруг прямой, перпендикулярной плоскости эклиптики (плоскости орбиты Земли). Согласно измерениям древнегреческого астронома Гиппарха, ежегодно земная ось поворачивается примерно на  $45''$  (угловых секунд), т.е. период прецессии равен 29000 лет. По современным данным период прецессии составляет 25800 лет. В этой задаче вам предлагается исследовать это явление в рамках ньютоновской механики.

В численных расчётах используйте следующие значения:

- Гравитационная постоянная:  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2$
- Средний радиус Земли:  $R = 6.371 \times 10^6 \text{ м}$
- Масса Земли:  $M_E = 5.972 \times 10^{24} \text{ кг}$
- Среднее расстояние от Земли до Солнца:  $d_{SE} = 1.496 \times 10^{11} \text{ м}$
- Масса Солнца:  $M_S = 1.989 \times 10^{30} \text{ кг}$
- Среднее расстояние от Земли до Луны:  $d_{ME} = 3.844 \times 10^8 \text{ м}$
- Масса Луны:  $M_M = 7.348 \times 10^{22} \text{ кг}$
- Угол наклона оси вращения Земли:  $\alpha = 23.5^\circ$

### Часть А. Форма земной поверхности (1.0 балл)

Моменты сил со стороны Солнца и Луны, действующие на Землю, не равны нулю из-за её не сферической формы, что приводит к прецессии. Главная причина не сферической формы Земли – центробежная сила, вызванная вращением планеты вокруг своей оси. Будем считать Землю каплей жидкости постоянной плотности, форма которой определяется центробежной силой и силой тяжести. В такой модели поверхность Земли является эллипсоидом вращения с полярным радиусом  $R_p$  и экваториальным радиусом  $R_e$  (см. рис. А.1).

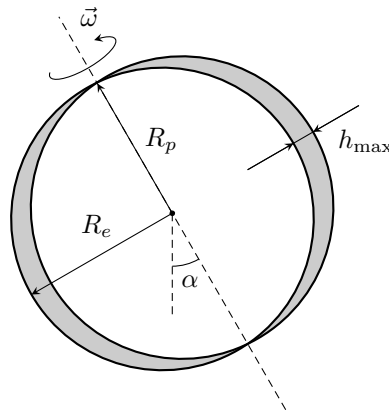


Рисунок А.1. Форма Земли (эллипсоид вращения). Указаны полярный и экваториальный радиусы.  $\alpha = 23.5^\circ$  – угол наклона земной оси с нормалью к плоскости эклиптики.

Разность экваториального и полярного радиусов  $h_{\max} = R_e - R_p$  гораздо меньше среднего радиуса  $R = (R_e + R_p)/2$ . С точностью до безразмерного коэффициента  $h_{\max}$  можно выразить через угловую скорость вращения Земли вокруг своей оси  $\omega$ , массу Земли  $M_E$  и средний радиус  $R$ :

$$h_{\max} \propto G^{-1} \omega^\beta M_E^\gamma R^\delta,$$

где  $G$  – гравитационная постоянная,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  – числа.

# Road to IPhO

**A1** Определите значения  $\beta$ ,  $\gamma$  and  $\delta$ .

**0.8**

**A2** Рассчитайте значение  $h_{\max}$ , считая безразмерный коэффициент перед выражением выше равным 1.

**0.2**

Независимо от значения  $h_{\max}$ , полученного вами в **A2**, используйте далее экспериментальное значение  $h_{\max} = 21$  км.

## Часть В. Усреднение гравитационного поля Солнца (3.2 балла)

Чтобы понять, почему момент силы со стороны Солнца на Землю относительно её центра отличен от нуля, рассмотрим рис. В.1 ниже. Разница в расстоянии до Солнца приводит к тому, что сила притяжения  $F_1$  отличается от силы  $F_2$ .

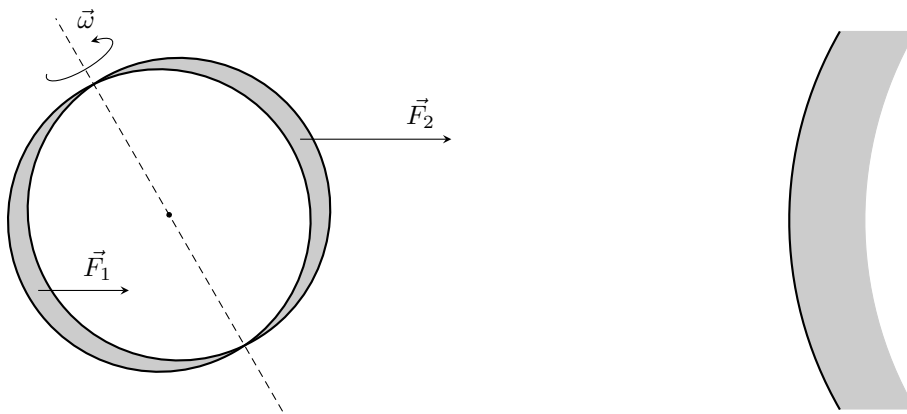


Рисунок В.1. Пояснение к вышесказанному. Земля на рисунке слева, Солнце – справа.

Величина момента сил, действующих на Землю, непрерывно изменяется в течение года. В положении, показанном на рисунке В.1, момент силы максимален; через четверть года момент силы равен нулю. Через полгода он снова достигает максимума, через три четверти года он вновь обнуляется, и т.д. Так как период прецессии много больше года, эти моменты сил можно с хорошей точностью приблизить их средним значением за год.

Чтобы рассчитать средний момент силы, действующий на Землю со стороны Солнца, определим среднее по времени гравитационное поле, создаваемое Солнцем в окрестности Земли. Его можно рассчитать как поле однородного «солнечного кольца», масса которого равна массе Солнца  $M_S$ , а радиус равен среднему расстоянию между Солнцем и Землёй  $d_{SE}$  (см. рис. В.2).

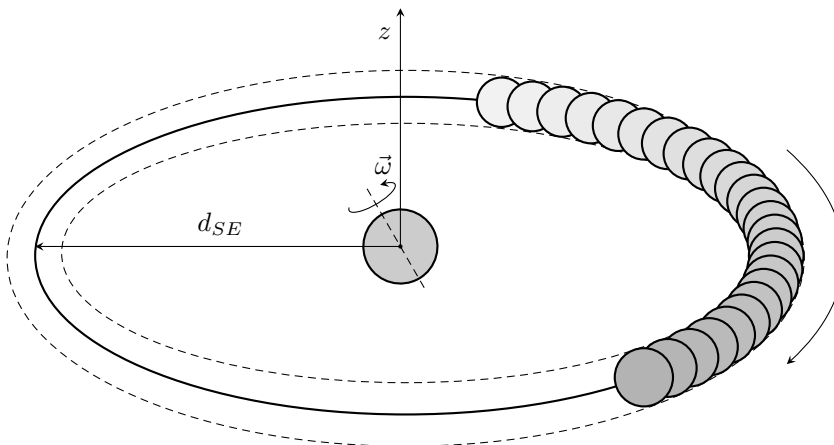


Рисунок В.2. Усреднение по времени эквивалентно равномерному «размазыванию» массы Солнца по окружности радиусом  $d_{SE}$ .

# Road to IPhO

Введём цилиндрическую систему координат с началом в центре Земли, ось  $z$  которой перпендикулярна плоскости эклиптики (плоскости кольца). Ось вращения Земли расположена под углом  $\alpha = 23.5^\circ$  к оси  $z$ .

**B1** Найдите направление и величину гравитационного поля, создаваемого «солнечным кольцом» на оси  $z$ . Выразите ответ через  $M_S$ ,  $d_{SE}$  и координату  $z$ . Считайте, что  $|z| \ll d_{SE}$ . **1.0**

**B2** Найдите направление и величину гравитационного поля, создаваемого «солнечным кольцом» в плоскости эклиптики на расстоянии  $r$  от начала координат. Считайте, что  $r \ll d_{SE}$ . **2.2**

## Часть C. Момент сил, действующих на Землю (2.6 балла)

Эта часть посвящена определению момента сил, действующих на Землю на основе результатов части B. Считайте Землю однородным твёрдым телом. Учтите также, что эллипсоид вращения можно рассматривать как шар с экваториальным радиусом Земли  $R_e$ , из которого удалили два сегмента (см. рис. C.1).

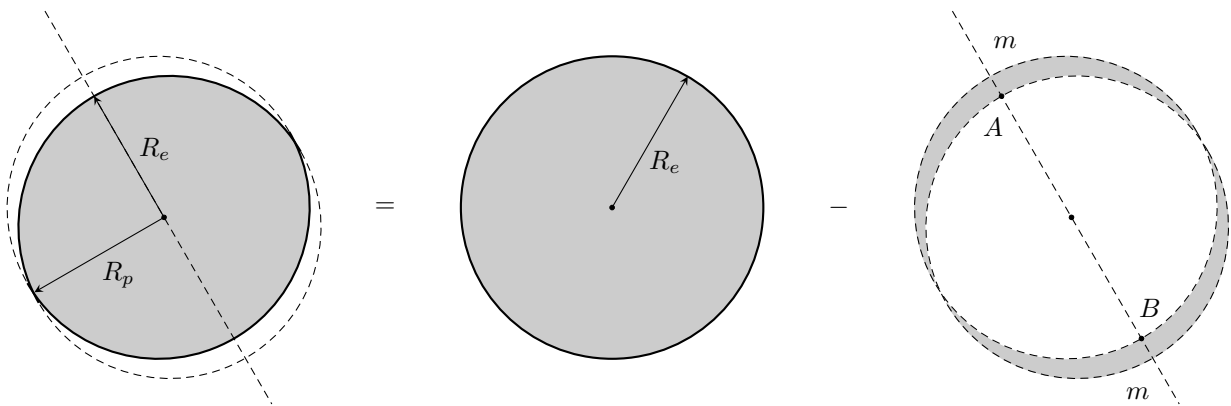


Рисунок C.1. Эллипсоид, которым является Земля, можно рассматривать как шар с радиусом  $R_e$ , у которого удалены два сегмента.

**C1** Найдите массу  $m$  одного из двух сегментов, указанных на рис. C.1. Выразите ответ через  $h_{\max}$ , массу Земли  $M_E$  и её полярный радиус  $R_p$ . **0.8**

Можно показать, что момент силы, действующий на удалённые сегменты, равен моменту силы, действующему на две точечные массы  $2m/5$ , расположенные в точках  $A$  и  $B$  на концах полярного диаметра (см. рис. C.1).

**C2** Используя этот факт, найдите момент сил  $\tau$  со стороны «солнечного кольца», действующий на Землю. Выразите ответ через  $M_E$ ,  $M_S$ ,  $d_{SE}$ ,  $R$  (средний радиус),  $h_{\max}$  и угол  $\alpha$ . Считайте, что  $h_{\max} \ll R$ . **1.8**

## Часть D. Угловая скорость прецессии земной оси (2.0 балла)

Ось вращения Земли **очень медленно** прецессирует вокруг оси  $z$ , описывая конус.

**D1** Получите выражение для периода  $T_1$  прецессии земной оси. Выразите ответ через  $M_S$ ,  $d_{SE}$ , угловую скорость  $\omega$  вращения Земли,  $h_{\max}$ ,  $R$  и  $\alpha$ . **1.8**

**D2** Вычислите период прецессии  $T_1$  в годах. **0.2**

# Road to IPhO

## Часть E. Влияние Луны (1.2 балла)

Значение, полученное в части D, намного больше реального, потому что до сих пор мы рассматривали только момент сил, создаваемый Солнцем, и пренебрегали влиянием Луны. В этой части считайте, что орбита Луны лежит в плоскости эклиптики, и Луна движется вокруг Земли по круговой орбите радиусом  $d_{ME}$ . Обозначим массу Луны как  $M_M$ , а период прецессии в новой модели как  $T_2$ .

**E1** Во сколько раз ( $T_2/T_1$ ) изменится период прецессии земной оси, если учесть момент сил, создаваемый Луной? Выразите ответ через  $d_{ME}$ ,  $d_{SE}$ ,  $M_S$  и  $M_M$ . **1.0**

**E2** Подставив численные значения, рассчитайте период прецессии  $T_2$  в годах. **0.2**