Атмосферная задача

Атмосфера Земли представляет собой сложную физическую систему. В этой задаче на основе простых моделей рассматриваются некоторые атмосферные явления. В численных расчётах вы можете использовать следующие значения:

- интенсивность солнечного излучения вблизи поверхности Земли $F_s = 1370\ \text{Вт/м}^2$;
- молярная масса воды $\mu_{\text{H}_2\text{O}} \approx 18\ \text{г/моль}$ и средняя молярная масса воздуха $\mu_{\text{air}} \approx 29\ \text{г/моль}$;
- постоянная Стефана–Больцмана $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ \text{Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$.

Считайте, что все газы идеальные, а все молекулы воздуха имеют 5 степеней свободы. Вы можете использовать значение следующего интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}, \quad a > 0.$$

Часть A. Температура поверхности Земли (1.2 балла)

В этой части задачи исследуется влияние атмосферы на температуру поверхности Земли. Считайте, что Земля и её атмосфера имеют альбедо (отношение отражённой энергии к падающей) $a = 0.3$ для солнечного излучения. Вы можете использовать это значение во всех частях этой задачи. Считайте также, что Земля излучает как абсолютно чёрное тело.

A1 Выразите среднюю мощность P_0, получаемую системой Земли и атмосферы, через F_s, a и радиус Земли R_E. **0.2**

A2 Вычислите равновесную температуру поверхности Земли T_{g0}, пренебрегая влиянием атмосферы. **0.3**

Ответ из **A2** меньше ожидаемого. Рассмотрим теперь дополнительно тонкий слой атмосферы температурой T_a, как показано на рис. A.1. Вследствие поглощения атмосфера пропускает долю t_{sw} падающего солнечного излучения, долю t_{lw} теплового излучения Земли, а излучает как абсолютно чёрное тело.

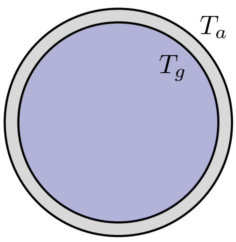

Рисунок A.1

A3 Вычислите равновесную температуру T_g поверхности Земли, если $t_{\text{sw}} = 0.9$ и $t_{\text{lw}} = 0.2$. **0.7**

Часть B. Спектр поглощения атмосферы (1.8 балла)

Инфракрасное излучение Земли может возбуждать колебательные уровни энергии молекул.

B1 Рассмотрим простую двухатомную молекулу из двух точечных масс m_A и m_B, соединенных пружиной с коэффициентом упругости k. Найдите угловую частоту её колебаний ω_d. **0.5**

B2 Согласно квантовой механике, при поглощении фотона возможен переход только между соседними уровнями энергии. Найдите энергию E_p фотона, который может возбудить колебания, описанные в **B1**. Эффектом отдачи пренебрегите. **0.2**

Энергия поглощённого фотона может несколько отличаться от разности энергетических уровней в молекуле. Предположим, что в состоянии покоя у рассматриваемой молекулы есть спектральная линия с частотой f_0.

B3 Найдите сдвиг частоты $f - f_0$ этой спектральной линии, если молекула движется со скоростью v по направлению к источнику излучения. Считайте, что $|v| \ll c$, где c – скорость света. **0.2**

Скорости молекул газа температурой T подчиняются распределению Максвелла. Для молекулы массой m вероятность того, что она движется с одномерной скоростью в диапазоне от v до $v + \mathrm{d}v$ по направлению к источнику излучения, равна $p_1(v)\,\mathrm{d}v$, где $p_1(v)$ – плотность вероятности, равная:

$$p_1(v) = C \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right)$$

Здесь C – нормировочный множитель, подобранный так, чтобы полная вероятность была равна единице, а k_B – постоянная Больцмана.

B4 Найдите нормировочный множитель C, если скорость v может лежать в диапазоне от $-\infty$ до ∞. **0.2**

B5 Найдите с точностью до нормировочного множителя плотность вероятности $p_2(f)$ найти молекулу со спектральной линией f_0, смещённой до f из-за теплового движения. Выразите ответ через f, f_0, T, m и физические постоянные. **0.3**

B6 Постройте качественный график зависимости $p_2(f)$ от $f - f_0$ и определите смещение $f^\star - f_0$, при котором $p_2(f^\star)$ составляет долю $1/e$ от своего максимального значения. **0.4**

Часть C. Устойчивость атмосферы (2.7 балла)

Рассмотрим небольшую цилиндрическую порцию воздуха на высоте z над поверхностью земли. Давление и плотность воздуха на этой высоте равны $p(z)$ и $\rho(z)$ соответственно, как показано на рис. C.1. Считайте, что поле тяжести g однородно и направлено вниз, а давление у поверхности Земли равно p_o.

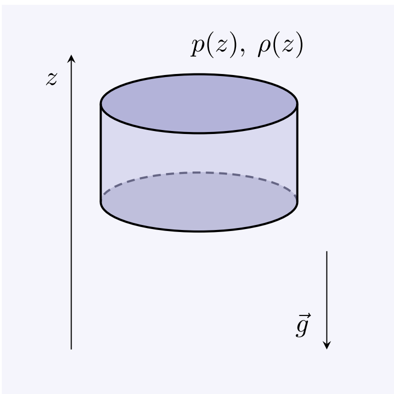

Рисунок C.1

C1 Выразите производную $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z$ через g и $\rho(z)$, если атмосфера находится в гидростатическом равновесии. **0.3**

C2 Выразите $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z$ через μ_{air}, g, $p(z)$, температуру $T(z)$ на высоте z и физические константы. **0.2**

C3 Считая атмосферу изотермической ($T(z) = T$), выразите $p(z)$ через z, μ_{air}, g, p_o, T и физические постоянные. **0.2**

В реальной атмосфере температура не постоянна и уменьшается с высотой со скоростью $\Gamma(z) = -\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$. Рассмотрим небольшую порцию воздуха, адиабатически поднимающуюся в атмосфере и находящуюся в механическом равновесии с окружающей средой.

C4	Для такой порции выразите скорость уменьшения температуры с высотой Γ_a через молярную теплоёмкость при постоянном давлении c_p, μ_{air} и g.	**0.6**

Для анализа устойчивости атмосферы рассмотрим смещение небольшой порции воздуха от положения равновесия. Пусть эта порция изначально находилась в равновесии на высоте z при температуре T, затем адиабатически переместилась по вертикали на расстояние δz_0. Считайте, что в этом процессе давление порции совпадало с давлением окружающего воздуха. Скорость уменьшения температуры Γ с высотой в остальной атмосфере остаётся при этом постоянной. Вязкостью можно пренебречь.

C5	Запишите уравнение движения относительно δz. При каком условии положение равновесия устойчиво? Найдите угловую частоту ω малых колебаний порции воздуха. Выразите ответы через T, Γ, g, μ_{air} и c_p.	**1.4**

Часть D. Влажность (2.7 балла)

Вода составляет небольшую часть атмосферы, но играет важную роль. Она является главным парниковым газом. Фаза воды зависит от её температуры и давления (см. фазовую диаграмму $p - T$ на рис. D.1). Когда давление и температура лежат на кривой насыщения водяного пара, вода может сосуществовать как в жидком, так и в газообразном виде. Наклон этой кривой определяется уравнением Клапейрона–Клаузиуса:

$$\frac{\mathrm{d}p_s}{\mathrm{d}T} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$$

где p_s – давление насыщенного пара (давление в момент фазового перехода), а ΔS и ΔV – изменения энтропии и объема этом в фазовом переходе соответственно. Считайте пар идеальным газом.

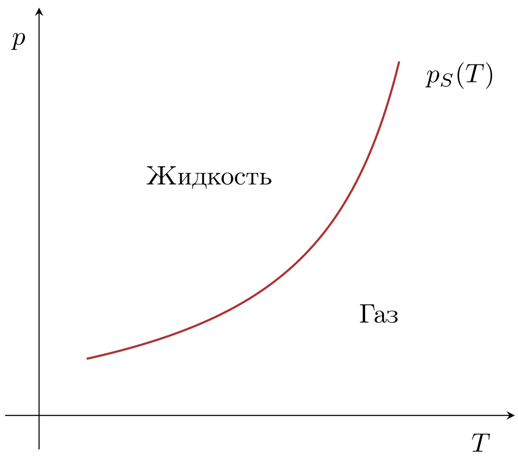

Рисунок D.1

D1	Выразите $\mathrm{d}p_s/\mathrm{d}T$ на кривой насыщения водяного пара через удельную теплоту парообразования воды L, $\mu_{\mathrm{H_2O}}$, p_s, T и физические постоянные.	**0.5**

D2	Пусть для некоторой температуры T_o известно давление насыщенного пара $p_s = p_{so}$. Выразите $p_s(T)$ через p_{so}, $\mu_{\mathrm{H_2O}}$, L, T, T_o и физические постоянные.	**0.2**

Рассмотрим теперь «влажную» порцию воздуха, которая поднимается адиабатически с начальной температурой T_i. Массовая доля пара в этой порции равна ϕ. Молярная теплоёмкость воздуха при постоянном давлении равна c_p. Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31$ Дж/(моль · К).

D3 Предположим, что изначально порция воздуха находилась при температуре $T_i = 17.0$°C и давлении $p_i = 10^5$ Па. Вычислите температуру T_l, при которой в ней начнётся конденсация воды, если $\phi = 10^{-2}$. Считайте, что количество воды в рассматриваемой порции остается постоянным во время подъема. Численные значения $L = 2460$ кДж/кг и $p_{so} = 1.94 \times 10^3$ Па при $T_i = 17.0$°C. **2.0**

Часть E. Солнечное гало (1.6 балла)

При подходящих атмосферных условиях вокруг Солнца может появляться яркое кольцо – гало. Оно возникает из-за кристалликов льда, присутствующих в верхних слоях тропосферы. Оказывается, что оно всегда появляется под определенным углом к направлению на Солнце.

Рисунок E.1. Фотография гало вокруг Солнца

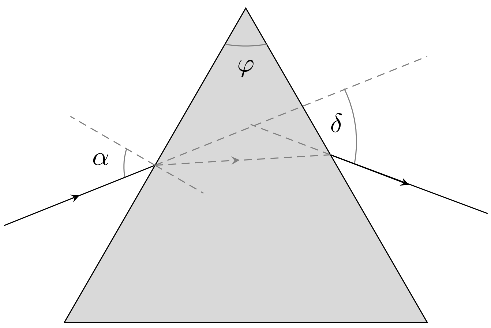

Рисунок E.2. Путь луча света, проходящего через призму

E1 Рассмотрим треугольную призму с показателем преломления n и углом φ при вершине. На призму падает луч света под углом α, как показано на рис. E.1. Выразите угол отклонения δ светового луча после прохождения призмы через α, n и φ. **0.8**

Чаще всего гало образуется, когда кристаллики льда имеют форму правильных шестигранных призм. Солнечный свет падает на случайно ориентированные кристаллики и рассеивается в разные стороны. В определенных направлениях интенсивность преломленного света оказывается максимальной, и это определяет угол, под которым видно яркое кольцо.

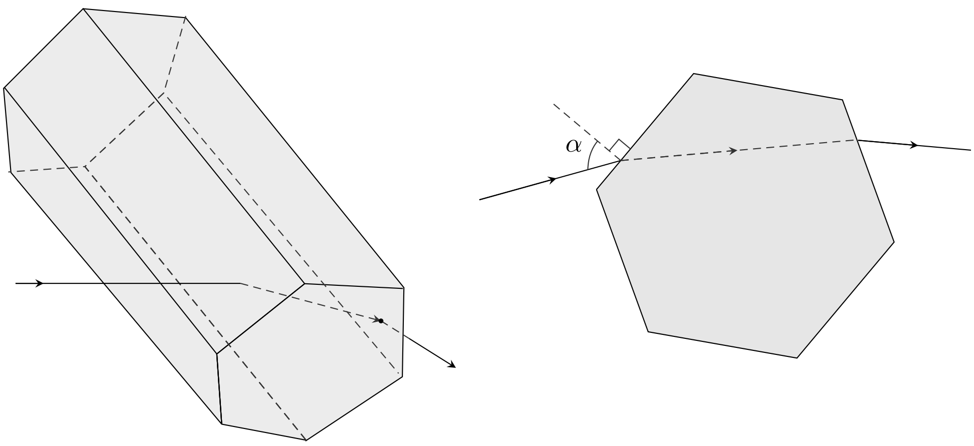

Рисунок E.3

Рассмотрите шестиугольную ледяную призму, ось которой перпендикулярна направлению распространения солнечных лучей. Пусть луч света проходит через две прямоугольные грани призмы, показанные на рис. E.2. Из-за случайной ориентации кристалликов льда свет может падать на их грани под разными углами падения α.

E2 Постройте на миллиметровке в листах ответов график зависимости угла отклонения δ от угла падения α в интервале $[20°, 70°]$ с шагом $5°$. Показатель преломления льда равен $n = 1.31$. **0.6**

E3 По графику, построенному в предыдущем пункте, определите, под каким углом гало кажется наиболее ярким по отношению к направлению на Солнце. **0.2**