

Road to IPhO

Волны и фазовые переходы в спиновых системах

Введение

В классической физике момент импульса возникает в результате вращения объекта вокруг оси – будь то волчок, вращающаяся планета или электрон в атоме. Однако в квантовой физике элементарные частицы обладают собственным моментом импульса, называемым **спином**. Спин играет важнейшую роль в различных физических явлениях, начиная от свойств материалов, например, магнетизме.

В этой задаче используется классическое описание спина, что даёт качественно правильные результаты. Задача посвящена изучению физики спиновых систем, спиновым волнам и фазовым переходам в магнетиках с точки зрения статистической физики.

Полезная информация

- $\text{ch}(x) \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\text{sh}(x) \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\text{th}(x) \equiv \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \approx x - \frac{x^3}{3}$ для $|x| \ll 1$
- Магнитное поле диполя с магнитным моментом $\vec{\mu}$ в точке с радиус-вектором \vec{r} , направленным от диполя, равно (μ_0 – магнитная постоянная):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3} \right)$$

Часть А. Прецессия и взаимодействие магнитных диполей (1.2 балла)

Рассмотрим кольцо радиусом R с равномерно распределёнными массой M и зарядом $Q > 0$. Кольцо вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр масс.

A1 Магнитный момент кольца $\vec{\mu}$ связан с его моментом импульса \vec{L} как $\vec{\mu} = \gamma \vec{L}$. Выразите постоянную γ **0.3** (т.е. **гиромагнитное отношение**) для этой системы через Q и M .

Пусть теперь кольцо находится в однородном магнитном поле $\vec{B} = B\hat{z}$, направленным под углом θ к угловой скорости $\vec{\omega}$, (см. рис. А.1).

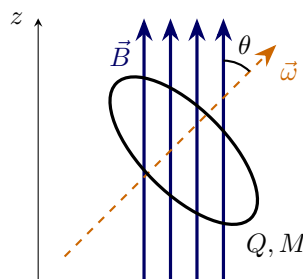


Рисунок А.1.

A2 Выразите угловую частоту ω_L прецессии момента импульса системы под действием внешнего магнитного поля (так называемую ларморовскую частоту) через B и γ . Считайте ω_L положительной, если при взгляде с положительного направления оси z вращение происходит против часовой стрелки. **0.4**

Road to IPhO

Пусть теперь внешнее магнитное поле отсутствует. На расстоянии $d \gg R$ от первого кольца располагают ещё одно, магнитный момент $\vec{\mu}_2$ которого направлен под углом θ к моменту $\vec{\mu}_1$, как показано на рис. А.2.

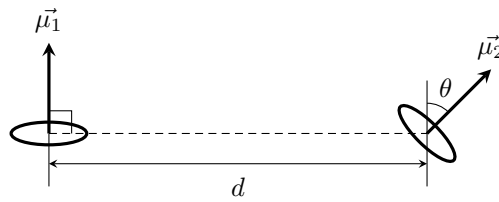


Рисунок А.2.

А3 Энергию магнитного взаимодействия двух колец можно записать как $U = J_0 \vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2$, где J_0 – константа, а \vec{L}_i – момент импульса i -го кольца. Выразите J_0 через γ , d и физические постоянные. **0.5**

Часть В. Спиновые волны (4.5 балла)

В этой части исследуется динамика спинов, то есть собственных моментов импульса частиц. Частица со спином обладает магнитным моментом $\vec{\mu}$, связанным с моментом импульса \vec{S} соотношением как в пункте А1, $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$.

В этой части будем учитывать только квантовое взаимодействие спинов, энергия которого так же, как и в пункте А3, оказывается пропорциональна $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$, однако знак энергии противоположен.

Рассмотрим очень длинную цепочку частиц со спинами. Эти частицы расположены вдоль оси x на расстоянии a друг от друга, см. рис. В.1. Будем учитывать только энергию взаимодействия ближайших друг к другу спинов, так что выражение для энергии:

$$E = -J \sum_i \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}$$

где $J > 0$ задает величину взаимодействия, \vec{S}_i – момент импульса спина i , модуль момента импульса S . Этот вектор может свободно вращаться во всех направлениях. Обратите внимание, что знак энергии отличается от части А, поскольку взаимодействие полностью квантовое.

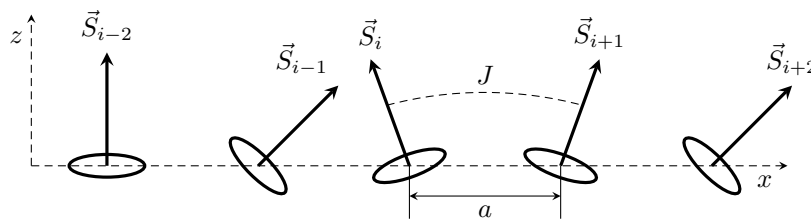


Рисунок В.1.

В1 Рассмотрим слагаемые, входящие в выражение для энергии взаимодействия и содержащие \vec{S}_i . Эти слагаемые можно совокупно рассматривать как энергию магнитного момента \vec{S}_i в некотором эффективном внешнем поле $\vec{B}_{i,\text{eff}}$. Определите $\vec{B}_{i,\text{eff}}$, выразите ответ через J , гиромагнитное отношение γ , и другие спиновые моменты импульса \vec{S}_j (выразите индексы j через i). **0.3**

В2 Используя эффективное магнитное поле, выразите производную i -го момента импульса $d\vec{S}_i/dt$ через J , \vec{S}_i , и другие моменты импульса \vec{S}_j (выразите индексы j через i). **0.3**

Road to IPhO

Далее в части **В** считайте, что все магнитные моменты мало отклоняются от оси z , так что верны приближения $S_{i,z} \approx S$ и $dS_{i,z}/dt \approx 0$ для каждого из спинов, см. рис. В.2. В этом случае решениями уравнений движения для $S_{i,x}$ и $S_{i,y}$ являются бегущие волны с волновым вектором k и циклической частотой ω .

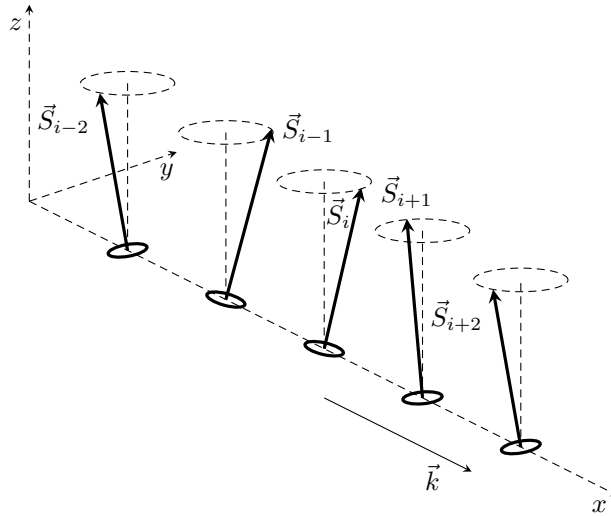


Рисунок В.2.

В3 Найдите соотношение между ω и k (то есть дисперсионное соотношение $\omega(k)$) для спиновых волн. Выразите ответ через J, S и a . **2.0**

Подсказка: координата i -го спина равна $x = a \cdot i$.

Описанная выше спиновая волна обладает определенной энергией и импульсом. При низких энергиях соотношение между энергией и импульсом такое же, как для классической частицы массы m_{eff} .

В4 Для малых k ($k \ll 1/a$), найдите эффективную массу m_{eff} спиновой волны. Выразите ответ через J, S, a и физические постоянные. **0.6**

Спиновые волны можно исследовать экспериментально с помощью рассеяния нейтронов. Хотя заряд нейтрона и равен нулю, у него есть спин, взаимодействующий с другими спинами.

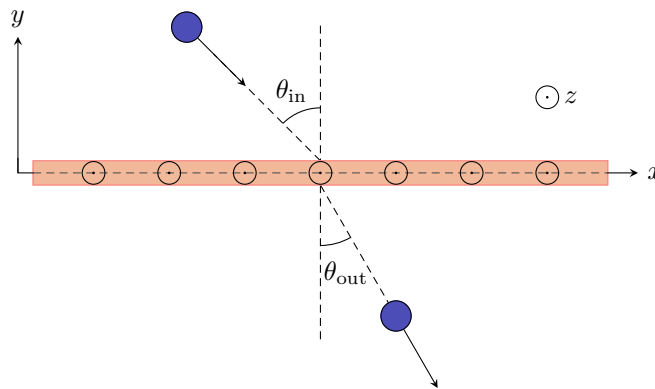


Рисунок В.3

В5 Пусть изначально все магнитные моменты в цепочке направлены вдоль оси z . Нейтрон с малой энергией движется в плоскости $x - y$. Угол падения нейтрона на спиновую цепочку равен θ_{in} , после рассеяния угол становится θ_{out} (см. рис. В.3). Считая, что нейтрон возбуждает одну спиновую волну, определите эффективную массу спиновой волны, выразите ответ через $\theta_{\text{in}}, \theta_{\text{out}}$ и массу нейтрона m_n . Изначально спины покоятся. **1.3**

Road to IPhO

Часть С. Фазовый переход в спиновой цепочке (4.3 балла)

Рассмотрим ту же цепочку, что и в части В, состоящую из N спинов. Пусть теперь каждый вектор спина направлен либо по оси z , либо против нее, так что проекция спинового момента импульса имеет вид $S_{i,z} = s_i S$, где $s_i = \pm 1$, см. рис. С.1. Помимо взаимодействия с ближайшими соседями на спины действует внешнее магнитное поле, направленное вдоль оси z , так что энергия системы имеет вид

$$E = -\tilde{J} \sum_i s_i s_{i+1} - h \sum_i s_i.$$

Здесь $\tilde{J} \geq 0$, h – постоянная, зависящая от магнитного поля. Спиновая система находится в термодинамическом равновесии при температуре T . Краевые эффекты не учитывайте.

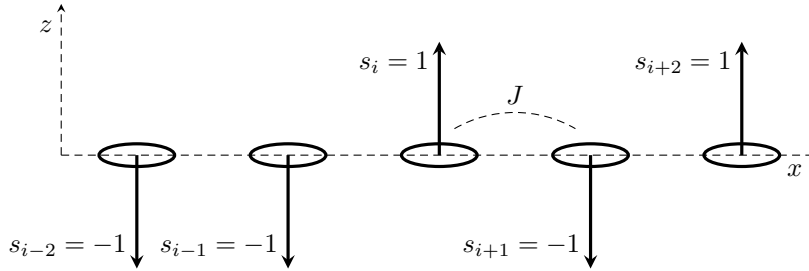


Рисунок С.1.

С1 Пусть $\tilde{J} = 0$. Найдите отношение вероятности того, что некоторый спин направлен вдоль магнитного поля p_{\uparrow} , к вероятности того, что он направлен против поля p_{\downarrow} . Выразите $p_{\uparrow}/p_{\downarrow}$ через h , T и физические постоянные. **0.5**

С2 Найдите средний спин системы $\bar{s} \equiv \frac{1}{N} \sum_i s_i$ при $N \gg 1$, выразите ответ через T и физические постоянные. **1.0**
Нарисуйте график зависимости \bar{s} от h в пределах от $-h_0$ до h_0 для случаев $h_0 \gg k_B T$, $h_0 \approx k_B T$ и $h_0 \ll k_B T$.

В оставшихся пунктах внешнее магнитное поле отсутствует, $h = 0$, а $\tilde{J} > 0$.

С3 Чему равна энергия E_g основного состояния системы (состояния с минимальной энергией). Выразите ответ через \tilde{J} и N . **0.2**

Вместо анализа взаимодействий каждого спина с соседями предположим, что каждый спин взаимодействует со средним спином \bar{s} .

С4 Получите приближенное выражение для энергии в виде суммы по всем спинам **0.2**

$$E = -\tilde{J}_{\text{eff}} \sum_i s_i$$

и выразите \tilde{J}_{eff} через \tilde{J} и \bar{s} .

С5 Аналогично пункту С.2, получите уравнение, которому удовлетворяет среднее значение спина \bar{s} . Количество решений этого уравнения зависит от T . Найдите критическую температуру T_c , при которой количество решений меняется. Выразите ответ через \tilde{J} и физические постоянные. **1.2**

С6 Найдите все возможные значения \bar{s} при $T < T_c$ и $T_c - T \ll T_c$. Выразите ответ через T и T_c . Нарисуйте график всех возможных значений \bar{s} в зависимости от температуры T в диапазоне $0 \leq T \leq 2T_c$. **1.0**

С7 Какой магнитной фазе отвечает случай $T > T_c$, а какой $T < T_c$? Выберите из парамагнитной и ферромагнитной фаз. **0.2**