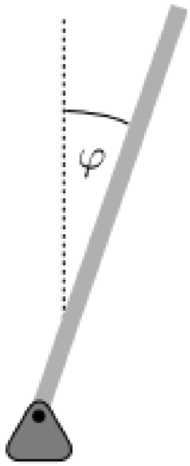
Устойчивость различных систем (11 баллов)

Часть A. Стабилизация с помощью обратной связи (3.5 балла)



Давайте исследуем, как изначально неустойчивое положение равновесия может быть стабилизировано. Для начала рассмотрим перевернутый маятник: тонкий длинный стержень длины l, шарнирно закрепленный в нижней точке так, что он может свободно вращаться вокруг шарнира. Положение стержня задается углом φ между стержнем и вертикалью ($\varphi \ll 1$). Ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с^2.

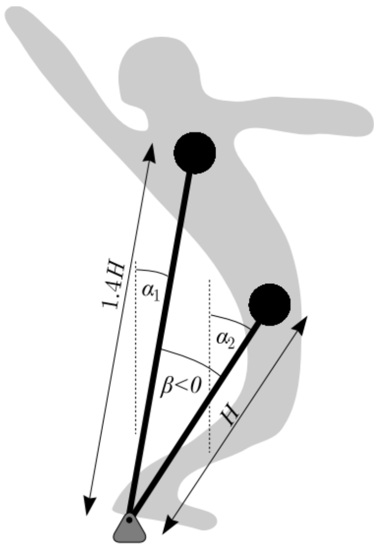
A1	Выразите угловое ускорение стержня $\ddot{\varphi}$ через φ, l и g. Покажите, что зависимость угла наклона φ от времени задается выражением $\varphi = Ae^{t/\tau} + Be^{-t/\tau}$, где A и B – постоянные, зависящие от начального положения и начальной угловой скорости стержня, а τ – характерное время падения. Выразите τ через l и g.	**1.5**

A2	Пусть теперь мальчик пытается поддерживать длинную тонкую палку в вертикальном положении на своей руке. Как только палка начинает падать, например, влево, он двигает руку влево на еще большее расстояние так, что центр масс палки оказывается правее её точки опоры. Вследствие этого момент силы тяжести начинает вращать палку вправо, уменьшая ее скорость вращения, направленную влево. Оцените, палку какой длины мальчик может держать вертикально, если время его реакции примерно равно $\tau_r = 0.2$ с. (Время реакции – это временная задержка между командой, посланной мозгом рукам, и соответствующим движением рук.)	**0.5**

A3	Люди и птицы удерживают себя в стоячем положении похожим образом. Они двигают точку опоры (точку внизу ступни, где приложена нормальная сила реакции опоры), например, изменяя угол между ступней и ногой, чтобы противостоять падению верхней части тела. Маленькая птичка высоты $l = 6$ см может стоять на ногах. Оцените сверху её время реакции.	**0.5**

A4	Равновесие на велосипеде тоже поддерживается путём переноса точки опоры, лежащей на линии между точками соприкосновения колес с землёй. Эта линия может быть перемещена поворотом руля во время езды. Оцените минимальную скорость велосипедиста v_m, при которой он может держать равновесие таким способом. Считайте, что для него характерное время падения такое же, как и у стержня длиной $L = 2$ м; расстояние между осями колёс $d = 1$ м.	**1.0**

Часть B. Канатоходец (3.5 балла)



Канатоходец не может двигать точку опоры в направлении, перпендикулярном канату. Вместо этого его равновесие поддерживается перемещением центра масс. Рассмотрим простую модель человека, балансирующего на канате. Нижнюю половину тела смоделируем точечной массой m на высоте H, а верхнюю половину – такой же точечной массой на высоте $1.4H$. Относительное положение этих точек можно изменять, сгибаясь влево или вправо; для простоты предположим, что расстояние от веревки до них будет оставаться постоянным, то есть они ведут себя как если бы они были прикреплены к концам двух невесомых стержней длины L и $1.4L$ соответственно. Пусть стержни образуют углы α_1 и α_2 с вертикалью (положительные значения соответствуют повороту по часовой стрелке), и угол между ними равен $\beta = \alpha_1 - \alpha_2$. Канатоходец, изгибаясь, может регулировать угол β.

B1 Предположим, что изначально канатоходец стоял в почти идеальном равновесии ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$). Из-за неустойчивости равновесия он медленно начинает падать по часовой стрелке. Он это замечает, когда $t = t_0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0 > 0$. Он быстро изгибается, чтобы перестать падать. Считайте, что угол β мгновенно принимает значение β_0. Выразите новые значения углов α_1 и α_2 через β_0 и α_0. **1.0**

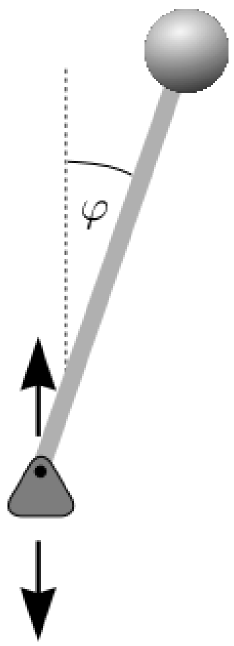
B2 Таким образом, канатоходец теперь согнут и поддерживает ту же форму тела ($\beta = \beta_0$) в течение времени T_b, после которого он почти мгновенно выпрямляется ($\beta = 0$). Он хочет снова встать вертикально $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Должен ли он был сгибаться по часовой стрелке ($\beta_0 > 0$) или против часовой стрелки ($\beta_0 < 0$)? Объясните свой ответ. **0.5**

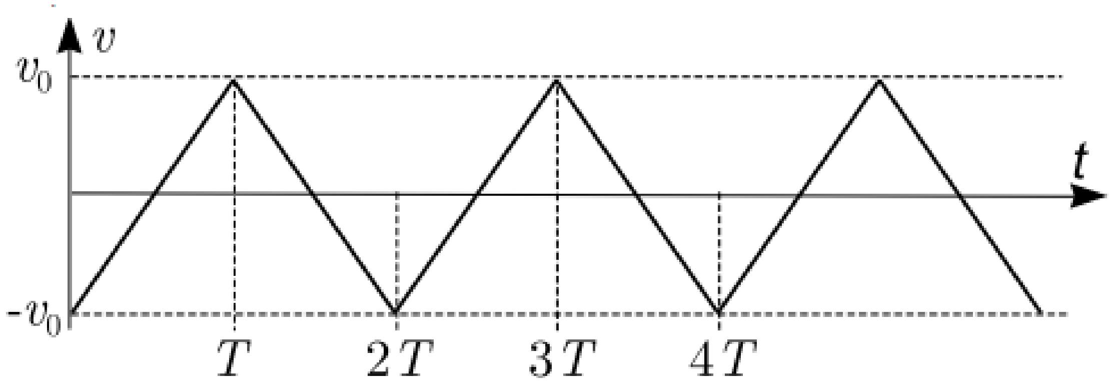
B3 Теперь будем считать, что $\alpha_0 \ll \beta_0$. Сразу после того, как он выпрямился, ни его угловая скорость ($\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2$), ни угол α_1 не равны нулю (равными нулю они станут значительно позже). Найдите значение выражения $\dot{\alpha}_1/\alpha_1$. Ответ выразите через H и g. **1.0**

B4 Найдите время T_b, в течение которого канатоходец согнут. Ответ выразите через α_0, β_0, H и g. Можно считать, что $\alpha_0 \ll \beta_0$. **1.0**

Часть C.Маятник Капицы (4 балла)

Положение равновесия перевернутого маятника может быть устойчивым, если его точка крепления колеблется с высокой частотой. Рассмотрим маятник длины l, схожий с маятником из части **A**, но здесь стержень считается невесомым, а на его конце закреплена точечная масса. Точка крепления маятника колеблется в вертикальном направлении. Пусть скорость v точки крепления зависит от времени t, как показано на графике ниже ($v > 0$ соответствует движению вверх); полупериод колебаний $T \ll l/v_0$. Также можно считать, что $v_0/T \gg g$, так что в пунктах **C1** и **C2** можно пренебречь ускорением свободного падения. Для упрощения вычислений лучше исследовать процесс в системе отсчета связанной с точкой крепления (примечание: ускорение системы отсчета $\vec{a}$ создает силу инерции $-M\vec{a}$, действующую на тело массы M).





C1	Считайте, что в момент $t = T/2$ маятник был неподвижен и наклонён под малым углом φ_0. Нарисуйте график зависимости угла наклона φ от времени, и определите угловое смещение маятника $\Delta\varphi$ в момент $t = T$, то есть, $\Delta\varphi = \varphi(T) - \varphi(T/2)$. Можно считать, что $\Delta\varphi \ll \varphi_0$.	**1.5**

C2	Так как мы все еще пренебрегаем силой тяжести, только сила инерции имеет ненулевой момент относительно шарнира. Найдите среднее по времени значение этого момента силы инерции за время $2T$.	**1.5**

C3	Теперь учтем силу тяжести. Напишите неравенство, которое должно выполняться для g, T, l и v_0, чтобы существовало вертикальное положение.	**1.0**