Фамилия, имя

Интегралы

Неопределенный и определенный интегралы

- Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.
- Если $F_1(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то $F_2(x)$ также является первообразной $f(x)$ тогда и только тогда, когда $F_3(x) - F_1(x) = \text{const}$.
- Неопределённым интегралом $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ функции $f(x)$ называется множество всех первообразных функции $f(x)$. Из предыдущего следует, что это множество функций, имеющих вид $F(x) + \text{const}$, где $F(x)$ — любая первообразная $f(x)$, const — произвольное действительное число. Поэтому при вычислении неопределённого интеграла важно не забывать $+\text{const}$.
- Определённый интеграл $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ имеет смысл «размерной» площади под графиком функции $f(x)$ для $x \in [a, b]$. В отличие от неопределённого интеграла определённый – это **число**. Строгое определение определённого интеграла сложно и сейчас не нужно.
- Согласно формуле Ньютона–Лейбница определённый интеграл непрерывной на отрезке функции может быть вычислен как
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$
где $F(x)$ — произвольная первообразная функция $f(x)$.

Табличные интегралы

1. $$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{const}, \quad n \neq -1, \quad x > 0$$
2. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + \text{const}$$
3. $$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + \text{const}, \quad \int e^x\,dx = e^x + \text{const}$$
4. $$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + \text{const}, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + \text{const}$$
5. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + \text{const}, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + \text{const}$$
6. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + \text{const}$$
7. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + \text{const}$$
8. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + \text{const}, \quad |x| \neq a$$
9. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + \text{const}$$

Рациональные функции

- **Рациональной** называется функция, представимая в виде $f(x) = P(x)/Q(x)$, где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены.
- **Дробь** $P(x)/Q(x)$ называется правильной, если $\deg P(x) < \deg Q(x)$.
- Если $\deg P(x) > \deg Q(x)$, то полезно разделить многочлен $P(x)$ на $Q(x)$ с остатком ($P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$), приводя к тождеству:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{Q(x)} + D(x).$$

- Так как $\deg R(x) < \deg Q(x)$, дробь $R(x)/Q(x)$ правильная.
- Над полем действительных чисел любой многочлен со старшим коэффициентом, равным единице, может быть разложен в произведение степеней одночленов вида $(x - x_i)^{k_i}$ и степеней неприводимых (т.е. не имеющих действительных корней) квадратных многочленов вида $(x^2 + p_j x + q_j)^{k_j}$.
- Правильные дроби следующего вида могут быть разложены следующим образом:

$$\frac{P(x)}{\widetilde{Q}(x)(x - x_i)^k} = \frac{A_k}{(x - x_0)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x - x_0)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{(x - x_0)} + \frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)},$$

$$\frac{P(x)}{\widetilde{Q}(x)(x^2 + px + q)^l} = \frac{B_l x + C_l}{(x^2 + px + q)^l} + \frac{B_{l-1} x + C_{l-1}}{(x^2 + px + q)^{l-1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + px + q)} + \frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)}.$$

  Отсюда следует, что любую правильную дробь можно разложить в сумму членов вида

$$\frac{A}{(x - x_0)^k} \quad \text{и} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^l}.$$

- Коэффициенты разложения находятся путём приведения суммы к общему знаменателю и приравнивания коэффициентов при соответствующих степенях x в исходной дроби и в полученной. Иначе, после приведения к общему знаменателю можно подставлять в числители исходной и полученной дроби произвольные значения x и приравнивать результаты.
- После разложения можно проинтегрировать по отдельности полученные члены:

$$\int \frac{A}{(x - x_0)^k}\,\mathrm{d}x = \text{степенной табличный интеграл},$$

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\ln\bigl(x^2 + px + q\bigr) + \frac{C - Bp/2}{\sqrt{q - p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{x + p/2}{\sqrt{q - p^2/4}} + \text{const}.$$

  Последнюю формулу запоминать необязательно, её легко можно получить при известных коэффициентах B, C, p, q.
- Интеграл вида

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^l}\,\mathrm{d}x$$

  выводится сложнее и практически гарантированно не встретится.

1

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x^3} =$$

2

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x + 1)(x + 2)(x - 3)} =$$

3

$$\int \frac{3x^3 - 5x + 8}{x^2 - 4}\,\mathrm{d}x =$$

4

$$\int \frac{x^2 - 2x - 5}{x^3 - x^2 + 2x - 2}\,\mathrm{d}x =$$

Замена переменной интегрирования

- Часто удобно представить x в виде функции от другой переменной t ($x = x(t)$). Тогда верно следующее:

$$\int_{x(t)}^{x(x)} f(x(t))\,\mathrm{d}x(t) = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Обратно, используя тождество $\mathrm{d}G(x) = g(x)\,\mathrm{d}x$, получаем следующее:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{G(x_1)}^{G(x_2)} f(x)\,\mathrm{d}G(x).$$

- При поиске нужной замены часто полезны следующие тождества:

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1,\\
\cos^2 x &= \operatorname{tg}^2 x + 1,\\
\sin^2 x &= \operatorname{ctg}^2 x + 1,\\
\sin^2 x &= \cos x,\\
\cos^2 x &= -\sin x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1,\\
\operatorname{ch}^2 x &= 1 - \operatorname{th}^2 x,\\
\operatorname{sh}^2 x &= \operatorname{cth}^2 x - 1,\\
\operatorname{sh}' x &= \operatorname{ch} x,\\
\operatorname{ct}' x &= \operatorname{sh} x.
\end{aligned}$$

Напомним, гиперболические функции определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2},\\
\operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2},\\
\operatorname{th} x &= \frac{1}{\operatorname{cth} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.
\end{aligned}$$

Их свойства схожи со свойствами соответствующих тригонометрических функций, и это неслучайно: для тригонометрических функций справедливы похожие формулы Эйлера:

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},\\
\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.
\end{aligned}$$

1

$$\int x \sin x^2 \, \mathrm{d}x =$$

2

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} =$$

3

$$\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x =$$

Интегрирование по частям

1

Докажите следующее утверждение:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,\mathrm{d}f(x).$$

2

$$\int xe^x \, \mathrm{d}x =$$

3

$$\int x^2 e^x \, \mathrm{d}x =$$

4

$$\int \arcsin x \, \mathrm{d}x =$$

5

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} \, \mathrm{d}x =$$

Тригонометрические функции

- Универсальная тригонометрическая подстановка:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Здесь $t = \operatorname{tg}(x/2)$, а значит

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Эта подстановка позволяет сводить многие интегралы от функций, зависящих от $\sin x$ и $\cos x$, к интегралам от рациональных функций.

- Интегралы вида

$$\int \sin^m(k_1 x)\sin^m(k_2 x)\ldots\cos^{m_1}(l_1 x)\cos^{m_2}(l_2 x)\ldots\,\mathrm{d}x$$

где m_i, n_j — натуральные (то есть произведение натуральных степеней синусов и косинусов с различными частотами), могут быть преобразованы к сумме интегралов от функций вида

$$A\sin ax, \quad B\cos bx$$

путём использования формул Эйлера для $\sin x$, $\cos x$.

Выражение вида

$$\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n \cdot \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^m$$

преобразуется после раскрытия скобок в указанную сумму.

- Могут быть полезны следующие тождества:

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x,$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$$

а также указанные ранее в предыдущем разделе.

1

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3-5\cos x} =$$

2

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3\sin x + 4\cos x + 5} =$$

3

$$\int \sin x \sin 3x \,\mathrm{d}x =$$

4

$$\int \cos^2 x \cos 2x \,\mathrm{d}x =$$

Двойные (и не только) интегралы

Интегрирование по двум переменным можно выполнять сначала по одной из переменных, считая другую временно постоянной, затем по второй.

Пример. Вычислим $\int_D \int (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где область D ограничена $y=x$ и $y=x^2$. Считаем x временно постоянным:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} (x+y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (xy+y^2/2)|_{x^2}^{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (3x^2/2 - x^3 - x^4/2)\,\mathrm{d}x = x^3/2 - x^4/4 - x^5/10|_0^1 = 3/20$$

1

$$\int\int\int (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

по объему $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

2

Граница эллипса задана уравнением $r = \dfrac{p}{1-e\cos\theta}$. Запишите выражение для малого элемента площади в полярных координатах, выразите площадь эллипса в полярных координатах и вычислите ее.

Интеграл Эйлера–Пуассона

Интеграл вида $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x$ называется интегралом Эйлера–Пуассона.

Интеграл $I(\alpha)$ сходится при любом $\alpha > 0$.

Интеграл вычисляется по формуле:

$$I(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Так как

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

то достаточно вычислить

$$I(1) = I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Сделаем замену переменной $x = ty$ $(y > 0)$:

$$I = y\int_0^{+\infty} e^{-t^2y^2}\,\mathrm{d}t.$$

Умножим это равенство на e^{-y^2} и проинтегрируем по y от 0 до $+\infty$:

$$I^2 = \int_0^{+\infty} Ie^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty} ye^{-y^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

Изменим порядок интегрирования:

$$I^2 = \int_0^{+\infty} dt\int_0^{+\infty} ye^{-y^2(1+t^2)}dy = \frac{\pi}{4},$$

откуда

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1

$(a > 0,\ ac - b^2 > 0)$ $\qquad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}\,\mathrm{d}x =$

2

$(a > 0)$ $\qquad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\operatorname{ch}(bx)\,\mathrm{d}x =$

Дифференцирование по параметру

В ряде случаев для упрощения вычислений полезно продифференцировать исходный интеграл по параметру.

1

$(a > 0)$ $\qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\operatorname{ch}(bx)\,\mathrm{d}x =$

2

$(a > 0,\ b > 0)$ $\qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x =$

3	$(a>0) \qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-\cos(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x =$
4	$(a>0) \qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos(bx)\,\mathrm{d}x =$
5	$(\alpha>0,\ b\in\mathbb{R}) \qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(bx)}{x}e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x =$
6	$(\alpha>0,\ \beta>0) \qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2-\frac{\beta}{x^2}}\,\mathrm{d}x =$
7	$(\alpha>0) \qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\alpha x^2\right)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x =$
8	$(\alpha>0,\ \beta>0) \qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos(bx)\,\mathrm{d}x =$

Интегралы Френеля

В некоторых случаях интегралы Френеля можно свести к интегралам Эйлера–Пуассона.

1	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x =$
2	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(ax^2+2bx+c\right)\mathrm{d}x =$
3	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(x^2\right)\cos 2\alpha x\,\mathrm{d}x =$
4	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(x^2\right)\cos 2\alpha x\,\mathrm{d}x =$

Фамилия, имя

Разные интегралы

Здесь собраны различные интегралы из различных источников (в том числе с международных олимпиад). Упорядочены не по уровню сложности, так что можно решать вразброс.

1

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x =$$

2

$$\int \ln^2 x \, \mathrm{d}x =$$

3

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} =$$

4

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sin x}} =$$

5

$$\int \cos^2 x \sin x \, \mathrm{d}x =$$

6

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2g(H_0 - x)}} =$$

7

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{1 - R/R_m}} \, \mathrm{d}R =$$

8

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Ft}{m\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m}\right)^2}} \, \mathrm{d}t =$$

9

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}x =$$

10

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}c}{(v^2 + c^2)^2} =$$

11

$$\int_{0}^{+\infty} v^3 \exp\left(-\frac{hv}{k_B T}\right) \mathrm{d}v =$$

12

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{(x-1)^{100}} \, \mathrm{d}x =$$

Фамилия, имя

13

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sin^2 x + \sin^2 x} \, \mathrm{d}x =$$

14

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}x \cdot \cos(2x) \cdot \cos(c \cdot \mathrm{tg} x) =$$

15

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \cdot \frac{\cos x}{c^2 + x^2} =$$

16

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \cdot \frac{2x \cdot \sin(2x)}{(a^2 + x^2)^2} =$$

17

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \cdot \frac{2b^3 x \cdot \cos(x)}{(b^2 + x^2)^2} =$$

18

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + e \cos\theta} =$$