# Дифференциальные уравнения

## С разделяющимися переменными

Если уравнение можно представить в виде $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$, то уравнение решается интегрированием левой и правой частей. Константа интегрирования определяется из начального/граничного условия.

**1** $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$, начальное условие: $y(0) = 1$

**2** $y'\operatorname{ctg} x + y = 2$, граничное условие: $y(x) \to -1$ при $x \to 0$

**3** $y' - xy^2 = 2xy$

**4** $z' = 10^{x+z}$

**5** $3y^2y' + 16x = 2xy^3$, граничное условие: $y(x)$ ограничено при $x \to +\infty$

## Однородные

Если при замене $x \to \lambda x$, $y \to \lambda y$ уравнение переходит в себя же, то подстановкой $y(x) = t(x)\cdot x$ оно сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Производная $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ находится в этом случае как $y'(x) = t'(x)\cdot x + t(x)$.

**1** $(x-y) + (x+y)y' = 0$

**2** $(y^2 - 2xy) + x^2y' = 0$

**3** $xy' = y - xe^{y/x}$

**4** $(y + \sqrt{xy}) = x \cdot y'$

## Линейные уравнения первого порядка

Если уравнение представимо в виде $P(x)y' + Q(x)y = R(x)$, то оно называется линейным. Если при этом ещё $R(x) \equiv 0$, уравнение называется однородным. Сумма решений линейного однородного уравнения также является его решением. Любое решение неоднородного уравнения (с произвольным $R(x)$) представляет собой сумму частного решения и некоторого решения однородного уравнения, определяемого начальными условиями. Решение неоднородного уравнения можно найти с помощью **метода вариации постоянной**.

### Метод вариации постоянной

Решим однородное линейное уравнение $P(x)y' + Q(x)y = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{Q(x)}{P(x)}\,\mathrm{d}x \implies y(x) = C \cdot \exp\left(-\int \frac{Q(x)}{P(x)}\,\mathrm{d}x\right)$$

Это позволяет нам упростить задачу, если искать решение в виде:

$$y(x) = C(x) \cdot \exp\left(-\int \frac{Q(x)}{P(x)}\,\mathrm{d}x\right),$$

и тогда уравнение сводится к

$$P(x)C'(x)\exp\left(-\int \frac{Q(x)}{P(x)}\,\mathrm{d}x\right) = R(x).$$

Отсюда можно найти зависимость $C(x)$:

$$C(x) = \int \frac{R(x)}{P(x)} \exp\left(\int \frac{Q(x)}{P(x)}\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}x + \mathrm{const},$$

где $\mathrm{const}$ определяется из начальных условий.

**1** $(2x+1)y' = 4x + 2y$

**2** $(xy + e^x) - x \cdot y' = 0$

**3** $y = x(y' - x\cos x)$

**4** $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$

**5** $y' + 2y = y^2 e^x$

**6** $(x+1)(y' + y^2) = -y$

**7** $y' = y^4 \cos x + y \cdot \operatorname{tg} x$

**8** $xy^2 y' = x^2 + y^3$

**9** $xy \cdot y' = (y^2 + x)$

**10** $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

**11** $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$

**12** $2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$

**13** $y' x^3 \sin y = xy' - 2y$

**14** $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$

## Допускающие понижения порядка

Если в уравнении явно отсутствует функция $y$, его можно решать относительно её производной $y'$. Если в уравнении явно отсутствует переменная $x$, то необходимо использовать замену

$$y' = z(y)$$

(здесь $z$ — функция $y$, это важно!). Тогда производная

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot z.$$

Решаем диффур на $z(y)$, после чего решаем диффур

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z(y).$$

**1** $x^2y'' = y'^2$

**2** $y^3y'' = 1$

**3** $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$

**4** $y''(2y' + x) = 1$

## Системы дифференциальных уравнений

Для решения системы дифференциальных уравнений полезно получить выражение, которое можно проинтегрировать по одной из переменных.

**1** $y' = \dfrac{x}{z}, \quad z' = -\dfrac{x}{y}$

**2** $y' = \dfrac{y^2}{z-x}, \quad z' = y + 1$

**3** $y' = \dfrac{z}{x}, \quad z' = \dfrac{z(y+2z-1)}{x(y-1)}$

**4** $y' = y^2z, \quad z' = \dfrac{z}{x} - yz^2$

**5** $2zy' = y^2 - z^2 + 1, \quad z' = z + y$

### Уравнения с частными производными

Дифференциальные уравнения можно обобщить на функции нескольких переменных. Такие уравнения называются дифференциальными уравнениями в частных производных. Решать такие уравнения зачастую гораздо сложнее, чем обыкновенные.

### Линейные уравнения

Самый простой тип дифференциальных уравнений в частных производных – линейные. Они имеют вид:

$$\sum_i A_i(x_j, f)\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \qquad (\#)$$

где $A_i(x_j, f)$ – некоторые заданные коэффициенты, $x_i$ – $n$ независимых переменных. С геометрической точки зрения это можно рассматривать как условие перпендикулярности вектора $\sum\limits_i A_i(x_j, f)\hat{x}_i$ градиенту $f$. Таким образом, задачу можно свести к построению семейства кривых, перпендикулярных градиенту $f$, на которых $f$ постоянна. Эти кривые называют **характеристическими**. Приращения переменных $\mathrm{d}x_i$ вдоль характеристической кривой связаны соотношениями:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1(x_j, f)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{A_2(x_j, f)} = \ldots = \frac{\mathrm{d}x_n}{A_n(x_j, f)}$$

Решая эту систему, можно в общем случае получить $n-1$ комбинаций $\Phi_\alpha(x_i)$, таких что $\mathrm{d}\Phi_\alpha(x_i) = 0$. Такие комбинации называют **первыми интегралами** системы. Непосредственной подстановкой несложно убедиться, что любая функция первых интегралов $F(\Phi_\alpha(x_i))$ будет являться решением исходного уравнения $(\#)$.

### Квазилинейные уравнения

Также часто встречаются дифференциальные уравнения в частных производных в виде:

$$\sum_i A_i(x_j, f)\frac{\partial f}{\partial x_i} = A_{n+1}(x_j, f) \qquad (\#\#)$$

Они называются **квазилинейными**. Для их решения нужно решить вспомогательное уравнение

$$\sum_i A_i(x_j, f)\frac{\partial g}{\partial x_i} + A_{n+1}(x_j, f)\frac{\partial g}{\partial f} = 0,$$

где $g(x_i, f)$ – некоторая новая функция, а $f$ считается независимой переменной. Тогда несложно проверить, что исходное уравнение $(\#\#)$ можно решить, выразив $f(x_i)$ из уравнения $g(x_i, f) = 0$.

**1** $xy\dfrac{\partial z}{\partial x} + xz\dfrac{\partial z}{\partial y} = yz, \quad z = 1 + y^2$ при $x = 1$

**2** $\dfrac{\partial z}{\partial x} + (z - x^2)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x, \quad z = x^2 + x$ при $y = 2x^2$

**3** $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + xz\dfrac{\partial z}{\partial y} = yz, \quad z = -y^2$ при $x = 0$

**4** $xz\dfrac{\partial z}{\partial x} + yz\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^3 + y, \quad z = 4y^3$ при $x = 3y^2$

**5** Волновое уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

## Фазовая плоскость

В аналитической механике и статистической физике необходим инструмент для сведения дифференциальных уравнений второго порядка (например, второго закона Ньютона) к системам уравнений первого порядка. Для этого обычному пространству $\vec{r}$ ставится в соответствие **фазовое пространство** $(\vec{r}, \vec{p})$, в котором импульс считается независимой переменной. Тогда уравнение $\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ сводится к системе:

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \vec{p} \\ \dot{\vec{p}} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{p}) \end{cases}$$

В некотором смысле точка $(\vec{r}, \vec{p})$ фазового пространства, описывающая состояние системы, движется в нём со «скоростью» $\left(\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{p}}\right) = \left(\vec{p}, \vec{F}\right)$. В простейшем одномерном случае точка $(x, \dot{x})$ движется в двумерном фазовом пространстве со «скоростью» $(\dot{x}, \ddot{x})$, где $\ddot{x}$ определяется из уравнения движения.

Для качественного анализа систем уравнений первого порядка используются **фазовые диаграммы**: семейства интегральных кривых векторного поля скоростей точек в фазовом пространстве.

Нарисуйте фазовые диаграммы для следующих уравнений. Явно найдите точки, в которых система находится в положении равновесия в фазовом пространстве, и линеаризуйте приведённую систему в окрестностях этих точек. По линеаризованному виду сделайте вывод о поведении диаграммы в окрестностях положений равновесия.

**1** $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0$

**2** $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$

**3** $\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0$

**4** $\ddot{x} + 2\dot{x} + \dot{x}^2 + x = 0$

**5** $\ddot{x} + \dot{x} + 2x - x^2 = 0$

**6** $\ddot{x} + \dot{x}^2 - x^2 + 1 = 0$

## Диффуры из физики

Несколько различных физических задач, где нужно «уметь» в диффуры.

### Ангармонические колебания

**1.1** Найдите период колебаний

$$\ddot{x} + x^{3/2} = 0$$

с амплитудой $A$. Ответ можно выразить через интеграл, содержащий непараметризованный интеграл.
**Подсказка:** используйте соотношение

$$x\,\mathrm{d}x = \dot{x}\,\mathrm{d}\dot{x}.$$

### По кругу

Частица начинает двигаться по окружности с постоянным по модулю ускорением.

**2.1** Какое расстояние она пройдет к моменту достижения максимальной скорости? Радиус окружности $R$. Ответ может содержать безразмерный непараметризованный интеграл.

### Сопротивление воздуха

**3.1** Найдите закон движения тела $h(t),\ t \in \mathbb{R}$, на которое действует сила сопротивления воздуха

$$\vec{F} = -kv\vec{v}.$$

В момент времени $t = 0$:

$$h = \dot{h} = 0$$

**3.2** Тело брошено со скоростью $v$ под углом $\theta$ к горизонту. На него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сопротивление воздуха $-k\vec{v}$. Найдите траекторию тела $y(x)$.

### Математический маятник

Покоящемуся маятнику, подвешенному на нити, мгновенно придают скоростью $v_0$.

**4.1** Запишите выражение для периода колебаний маятника после установления движения. Постройте качественный график, укажите на нём важные точки. Вязкостью воздуха можно пренебречь, $m = g = l = 1$.

Теперь считайте силу сопротивления воздуха равной $-k\vec{v}$, где $k > 0$.

**4.2** Найдите период колебаний маятника через достаточное большое (*но не очень большое =)*) время. Ответ может содержать невычисленные интегралы.

### Вода в кастрюле

Вода налита в достаточно широкую кастрюлю. Плотность воды $\rho$, поверхностное натяжение $\sigma$, ускорение свободного падения $g$, угол смачивания $\theta$. Горизонтальную координату будем отсчитывать вдоль оси $x$ в сторону кастрюли, вертикальную – вниз вдоль оси $y$. Начало координат – в верхней точке жидкости.

**5.1** Определите уравнение кривой $y(x)$.