

Переход жидкость–пар

Предисловие

Метод простой итерации (МПИ) – один из простейших методов численного решения уравнений. Чтобы решить уравнение с помощью МПИ, его представляют в виде

$$x = f(x).$$

Подставляя в качестве аргумента функции начальное приближение x_0 , мы получим первое приближение x_1 . Далее, подставляя x_1 в качестве аргумента функции, мы получим уже второе приближение x_2 , и т.д. Если выбрать функцию $f(x)$ так, чтобы $|f'(x)| < 1$, то разница между последовательными приближениями будет уменьшаться, а результат вычислений будет всё ближе к правильному ответу.

Метод простой итерации удобно использовать для численного нахождения величин, заданных неявно как решение некоторого уравнения.

Примечание: в задаче используется функция $\operatorname{th} x$ – **гиперболический тангенс**. Она определяется как

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Несложно видеть, что $|\operatorname{th} x| < 1$. Функция, обратная к гиперболическому тангенсу, обозначается $\operatorname{arth} x$.

Примечание: во всей задаче буквой t обозначается температура в $^{\circ}\text{C}$, а буквой T – температура в К.

Часть А. Уравнение Шиманского (5.5 балла)

В этой задаче будем рассматривать фазовый переход жидкость–пар. Этот переход характеризуется удельной теплотой испарения жидкости L . В реальности удельная теплота испарения зависит от температуры. Эта зависимость может быть с хорошей точностью описана **уравнением Шиманского**

$$\frac{L}{L_0} = \operatorname{th} \left[\frac{L}{L_0} \frac{T_c}{T} \right].$$

Характерный вид зависимости $L(T)$ показан на рис. 1. Здесь L_0 и T_c – некоторые величины, определяемые природой жидкости. L_0 имеет размерность удельной теплоты испарения, а T_c называется **критической температурой** жидкости. Физический смысл критической температуры мы выясним в следующей части задачи, а пока определим L_0 и T_c для воды по известным значениям $L(t)$.

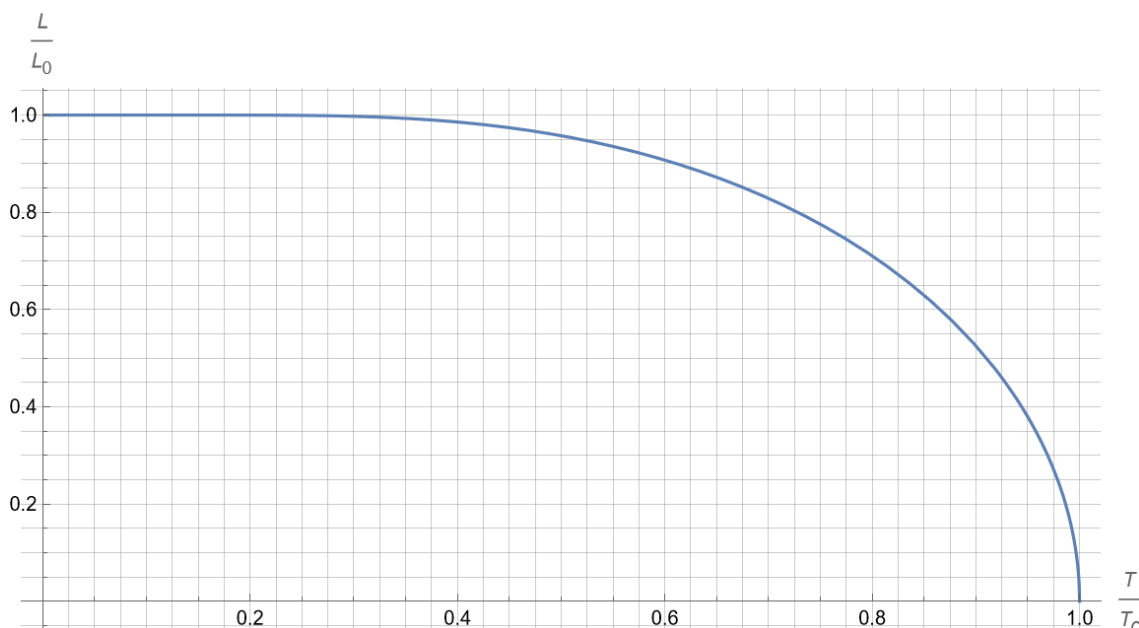


Рис. 1 – Характерный вид зависимости $L(T)$

Пусть нам известны значения удельной теплоты испарения жидкости L_1 и L_2 при температурах T_1 и T_2 соответственно (для определённости $T_2 > T_1$).

A1 Запишите уравнение, которое позволит с помощью метода простой итерации найти величину $\frac{T_c}{L_0}$, и уравнения, с помощью которых отсюда можно будет найти сами величины T_c и L_0 . **1.0**

В листах ответов вам дана таблица пар точек (t_1, L_1) и (t_2, L_2) (по одной паре на строку).

A2 Для каждой пары точек найдите величины T_c и L_0 . **4.0**

A3 Найдите средние арифметические полученных вами значений, \bar{T}_c и \bar{L}_0 . **0.5**

Часть В. Критическая точка воды (4.5 балла)

Как вы могли заметить, удельная теплота испарения жидкости с ростом температуры уменьшается, обнуляясь при температуре выше критической. Таким образом, переход жидкость–пар при температуре выше критической не предполагал бы изменения энергии взаимодействия молекул, т.е. жидкость ничем не будет отличаться от пара. Такое состояние вещества при температуре выше T_c называют **сверхкритической жидкостью**. При этом при температуре ниже T_c жидкость и пар представляют собой разные фазы вещества. В координатах (p, T) (см. рис. 2) граница между ними фактически представляет собой кривую давления насыщенного пара $p_n(T)$. Давление насыщенного пара удовлетворяет **уравнению Клапейрона–Клаузиуса**

$$\frac{dp_n}{p_n} = \frac{\mu L}{R T^2} dT,$$

где μ – молярная масса вещества (для воды $\mu_v = 18.0 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$), $R = 8.314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – универсальная газовая постоянная.

Точку $(p_n(T_c), T_c)$ называют **критической точкой** вещества. В этой части мы попробуем оценить давление $p_c = p_n(T_c)$ в критической точке.

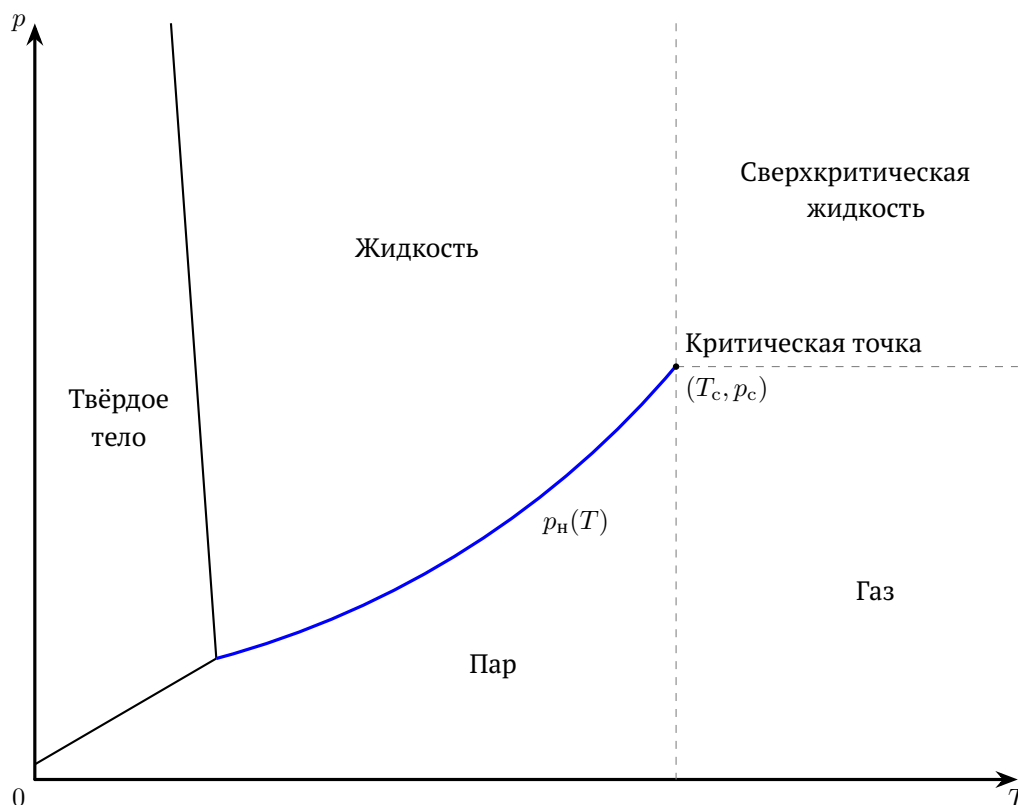


Рис. 2 – Фазовая диаграмма воды в координатах (p, T)

Поскольку $\frac{dT}{T^2} = -d\left[\frac{1}{T}\right]$, для нахождения p_c удобно построить на миллиметровке график $L\left(\frac{1}{T}\right)$ и найти площадь S под ним.

B1 Запишите формулу, которая позволяет с помощью метода простой итерации найти $L\left(\frac{1}{T}\right)$ по значениям \bar{L}_0 и \bar{T}_c , полученным в предыдущей части. **0.3**

B2 С помощью этой формулы найдите зависимость $L\left(\frac{1}{T}\right)$ в диапазоне температур от $t = 100\text{ }^\circ\text{C}$ до T_c . **2.0**
Примечание: Пересчитайте не менее 20 точек, старайтесь покрыть диапазон однородно. Это увеличит точность ваших дальнейших расчётов.

B3 Постройте график $L\left(\frac{1}{T}\right)$ в диапазоне от $t = 100\text{ }^\circ\text{C}$ до T_c . **0.5**

B4 Вычислите площадь S под графиком. **1.0**

B5 Выразите давление p_c в критической точке через S и вычислите его с *тремя значащими цифрами*, если давление $p_n(100\text{ }^\circ\text{C}) = 1.013 \cdot 10^5\text{ Па}$. **0.7**