

Road to IPhO

Переход жидкость–пар

Предисловие

Метод простой итерации (МПИ) — один из простейших методов численного решения уравнений. Чтобы решить уравнение с помощью МПИ, его представляют в виде

$$x = f(x).$$

Подставляя в качестве аргумента функции начальное приближение x_0 , мы получим первое приближение x_1 . Далее, подставляя x_1 в качестве аргумента функции, мы получим уже второе приближение x_2 , и т.д. Функцию $f(x)$ всегда можно выбрать так, чтобы разница между последовательными приближениями уменьшалась, а результат вычислений становился всё ближе к правильному ответу.

Метод простой итерации удобно использовать для численного нахождения величин, заданных неявно как решение некоторого уравнения.

Примечание: в задаче используется функция $\operatorname{th} x$ — **гиперболический тангенс**. Она определяется как

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Несложно видеть, что $|\operatorname{th} x| < 1$. Функция, обратная к гиперболическому тангенсу, обозначается $\operatorname{arth} x$.

Примечание: во всей задаче буквой t обозначается температура в $^{\circ}\text{C}$, а буквой T — температура в К.

Часть А. Уравнение Шиманского (5.5 балла)

В этой задаче будем рассматривать фазовый переход жидкость–пар. Этот переход характеризуется удельной теплотой испарения жидкости L . В реальности удельная теплота испарения зависит от температуры. Эта зависимость может быть с хорошей точностью описана **уравнением Шиманского**

$$\frac{L}{L_0} = \operatorname{th} \left[\frac{L}{L_0} \frac{T_c}{T} \right].$$

Характерный вид зависимости $L(T)$ показан на рис. 1. Здесь L_0 и T_c — некоторые величины, определяемые природой жидкости. L_0 имеет размерность удельной теплоты испарения, а T_c называется **критической температурой** жидкости. Физический смысл критической температуры мы выясним в следующей части задачи, а пока определим L_0 и T_c для воды по известным значениям $L(t)$.

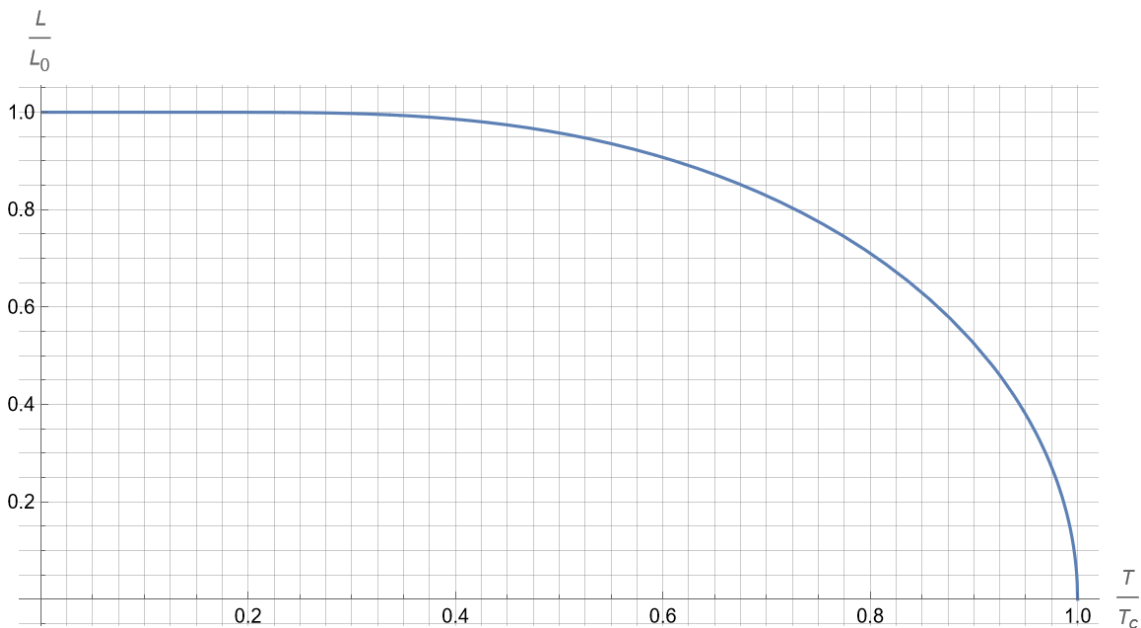


Рис. 1. Характерный вид зависимости $L(T)$

Пусть нам известны значения удельной теплоты испарения жидкости L_1 и L_2 при температурах T_1 и T_2 соответственно (для определённости $T_2 > T_1$).

Road to IPhO

A1 Запишите уравнение, которое позволит с помощью метода простой итерации найти величину $\frac{T_c}{L_0}$, и уравнения, с помощью которых отсюда можно будет найти сами величины T_c и L_0 . **1.0**

В листах ответов вам дана таблица пар точек (t_1, L_1) и (t_2, L_2) (по одной паре на строку).

A2 Для каждой пары точек найдите величины T_c и L_0 . **4.0**

A3 Найдите средние арифметические полученных вами значений, \bar{T}_c и \bar{L}_0 . **0.5**

Часть В. Критическая точка воды (4.5 балла)

Как вы могли заметить, удельная теплота испарения жидкости с ростом температуры уменьшается, обнуляясь при температуре выше критической. Таким образом, переход жидкость-пар при температуре выше критической не предполагал бы изменения энергии взаимодействия молекул, т.е. жидкость ничем не будет отличаться от пара.

Такое состояние вещества при температуре выше T_c называют **сверхкритической жидкостью**. При этом при температуре ниже T_c жидкость и пар представляют собой разные фазы вещества. В координатах (p, T) (см. рис. 2) граница между ними фактически представляет собой кривую давления насыщенного пара $p_n(T)$. Давление насыщенного пара удовлетворяет **уравнению Клапейрона-Клаузиуса**

$$\frac{dp_n}{p_n} = \frac{\mu L}{R T^2} dT,$$

где μ – молярная масса вещества (для воды $\mu_v = 18.0 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$), $R = 8.314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ – универсальная газовая постоянная.

Точку $(p_n(T_c), T_c)$ называют **критической точкой** вещества. В этой части мы попробуем оценить давление $p_c = p_n(T_c)$ в критической точке.

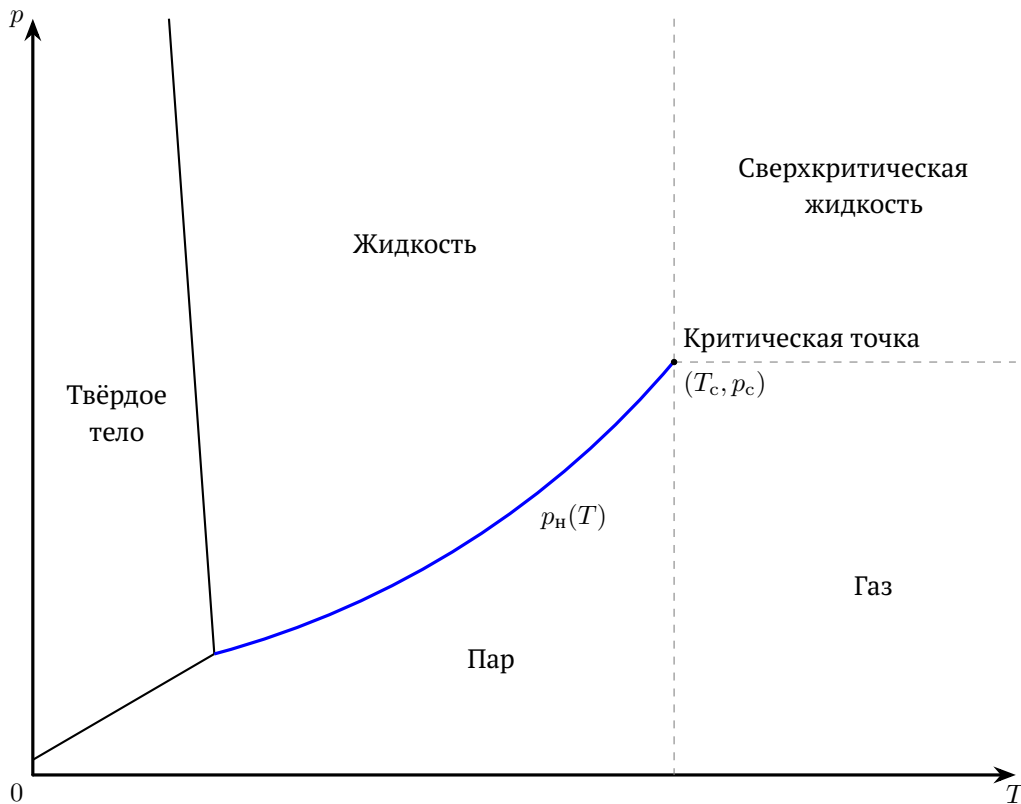


Рис. 2. Фазовая диаграмма воды в координатах (p, T)

Поскольку $\frac{dT}{T^2} = -d\left[\frac{1}{T}\right]$, для нахождения p_c удобно построить на миллиметровке график $L\left(\frac{1}{T}\right)$ и найти площадь S под ним.

Road to IPhO

В1 Запишите формулу, которая позволяет с помощью метода простой итерации найти $L\left(\frac{1}{T}\right)$ по значениям \bar{L}_0 и \bar{T}_c , полученным в предыдущей части. **0.3**

В2 С помощью этой формулы найдите зависимость $L\left(\frac{1}{T}\right)$ в диапазоне температур от $t = 100\text{ }^\circ\text{C}$ до T_c . **2.0**

Примечание: Пересчитайте не менее 20 точек, старайтесь покрыть диапазон однородно. Это увеличит точность ваших дальнейших расчётов.

В3 Постройте график $L\left(\frac{1}{T}\right)$ в диапазоне от $t = 100\text{ }^\circ\text{C}$ до T_c . **0.5**

В4 Вычислите площадь S под графиком. **1.0**

В5 Выразите давление p_c в критической точке через S и вычислите его с *тремя значащими цифрами*, если давление $p_n(100\text{ }^\circ\text{C}) = 1.013 \cdot 10^5$ Па. **0.7**