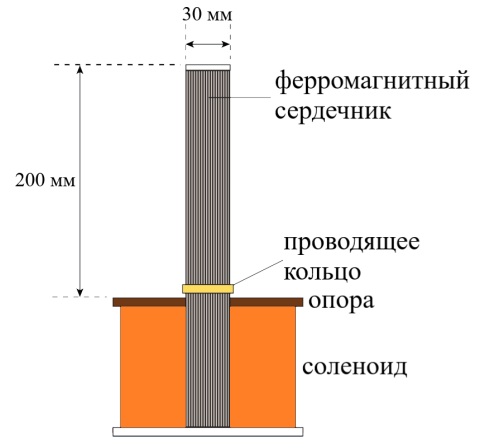


Road to IPhO

Прыгающее кольцо Томсона

Введение

Для демонстрации закона электромагнитной индукции очень часто используется устройство, называемое индукционным ускорителем Томсона. Как показано на рисунке, ускоритель представляет собой длинный вертикальный ферромагнитный сердечник, нижний конец которого помещается в соленоид. Если надеть на сердечник небольшое кольцо из проводящего немагнитного материала и подать на соленоид мощный переменный ток, кольцо взлетит вверх. Если же силу тока увеличивать медленно, кольцо вскоре оторвётся от опоры и начнёт левитировать. Это происходит из-за взаимодействия магнитного поля соленоида с вихревыми токами (токами Фуко), возбуждаемыми в кольце. В этой задаче мы подробно исследуем индукционный ускоритель и поведение кольца. В дальнейшем при расчётах высоту верхнего конца сердечника над опорой (начальным положением кольца) считайте равной $H = 200$ мм, диаметр сердечника и кольца – $d = 30$ мм. Масса кольца $m = 30$ г, его индуктивность $L = 1.0$ мГн, сопротивление $R = 1.0$ Ом. Циклическая частота используемого тока $\omega = 100\pi$ рад/с, ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с².



Во всех пунктах задачи считайте, что компонента индукции B_z магнитного поля внутри сердечника зависит только от координаты z . Также везде, кроме части С, считайте, что ЭДС индукции в кольце вызвана только вихревым электрическим полем.

Часть А. Сила, действующая на кольцо (1.9 балла)

Рассмотрим движение кольца вдоль сердечника. Введём цилиндрические координаты, направив ось z вертикально вверх вдоль оси симметрии сердечника так, что опора соответствует координате $z = 0$. Пусть внутри сердечника аксиальная компонента магнитного поля равна $B_z(t)$, снаружи сердечника радиальная компонента магнитного поля равна $B_\rho(t)$. При изменении магнитного поля в сердечнике в кольце возникают токи Фуко, которые взаимодействуют с радиальной компонентой магнитного поля. За положительное направление токов примите направление обхода против часовой при виде сверху.

A1 Запишите уравнение, связывающее силу тока в кольце $I(t)$ и магнитное поле в сердечнике $B_z(t)$. **0.3**

A2 Получите зависимость силы вихревого тока $I(t)$ от времени при $B_z(t) = B_m \cos \omega t$. **0.5**

Пусть теперь компоненты поля будут функциями не только времени t , но и координаты z . Будем однако считать, что характерный масштаб, на котором эти функции заметно изменяются, намного больше масштаба «быстрых» колебаний кольца. Таким образом, $B_z(z, t) = B_{0z}(z) \cos \omega t$ и $B_\rho(z, t) = B_{0\rho}(z) \cos \omega t$.

A3 Из теоремы Гаусса найдите радиальную компоненту поля $B_{0\rho}(z)$. Далее во всех пунктах используйте полученный результат. **0.3**

A4 Найдите зависимость аксиальной компоненты силы $F_z(z, t)$, действующей на кольцо, от координаты z и времени t . **0.2**

Поскольку частота ω переменного тока также заметно больше характерного масштаба времени, на котором происходит движение кольца, можно считать, что на кольцо действует сила $F_z(z)$, усреднённая по периоду.

A5 Найдите $F_z(z)$. **0.6**

Часть В. Подскоки и левитация (2.3 балла)

Расчёт компонент магнитного поля в реальном индукционном ускорителе – довольно сложная задача, поэтому далее будем считать, что $B_{0z}(z)$ убывает линейно от некоторого значения B_0 при $z = 0$ до нуля при $z = H$. Выше верхнего края сердечника поле отсутствует.

Road to IPhO

B1 Найдите выражение для $F_z(z)$ в рассматриваемой геометрии и потенциал этой силы $U_F(z)$ (считайте, что он равен нулю на вершине сердечника). **0.5**

B2 На какой высоте h будет парить кольцо в состоянии равновесия, если поле «включить» медленно? Выразите ответ через $m, g, R, L, \omega, d, B_0, H$. **0.5**

B3 На какую высоту h_m подскочит кольцо, если поле «включить» быстро? Выразите ответ через $m, g, R, L, \omega, d, B_0, H$. **0.5**

Эти величины можно связать между собой.

B4 Найдите, на какую высоту h_m в общем случае подскочит кольцо при быстром включении поля, если при медленном включении оно левитирует на высоте h . Вычислите h_m , если $h = 18$ см; 8 см. Ответы приведите с двумя значащими цифрами. **0.8**

Часть С. Затухание колебаний (1.5 балла)

В этой части учтём вклад в ЭДС, вызванный изменением магнитного потока в кольце вследствие его движения вдоль оси z . Предположим, что мы включили магнитное поле резко, и кольцо подлетело на высоту $h_m = 16$ см. В дальнейшем кольцо совершает периодическое движение вдоль сердечника, медленно теряя энергию за счёт диссипации, вызванной этим вкладом в ЭДС. Исследуем это движение. Пусть кольцо движется в точке z со средней скоростью v_z .

C1 Найдите дополнительную среднюю силу Ампера $F_z(v_z, z)$, возникающую из-за движения кольца. **0.5**

Из-за вышеописанных потерь в результате каждого колебания амплитуда колебаний кольца A будет уменьшаться на некоторую величину $\Delta A \ll A$. Введём логарифмический декремент затухания как $\delta = \Delta A/A$.

C2 Найдите декремент затухания δ . Выразите ответ через R, L, ω, g, H, h_m . Вычислите δ с двумя значащими цифрами. **1.0**

Часть D. Несколько колец (1.8 балла)

Подадим теперь на соленоид ровно такой ток, чтобы кольцо перестало давить на опору. Положим сверху ещё одно такое же кольцо. Вопреки интуиции пара колец поднимется над опорой на некоторую высоту. Исследуем это явление подробнее.

D1 Найдите сопротивление R_n стопки из n контактирующих колец. Найдите удельную силу F_n/nmg , действующую на каждое из колец в стопке при $z = 0$. На какой высоте h_n при этом левитирует стопка? Кольца можно считать очень тонкими, поэтому индуктивность стопки колец равна индуктивности одного кольца. Ответы выразите через n, H, R, L, ω . **0.8**

D2 При каком числе колец n_{opt} удельная сила будет наибольшей? Вычислите его для рассматриваемого в задаче кольца. **0.5**

D3 При каком максимальном числе колец n_{max} стопка колец ещё будет левитировать? Вычислите его для рассматриваемого в задаче кольца. **0.5**

Часть E. Такой себе двигатель (2.5 балла)

Индукционный ускоритель Томсона можно рассматривать не только как интересную демонстрационную модель, но и как вполне рабочий преобразователь электрической энергии в механическую. Попробуем выяснить, насколько он эффективен. Параметры установки для численного расчёта те же, что и во введении; $h = 18$ см. Считайте, что при резком включении поля кольцо способно подняться выше верхнего края сердечника.

Road to IPhO

E1 Найдите, как зависит средняя мощность $R\overline{i^2}$ токов Фуко, возникающих в катушке, от координаты z . Ответ **0.7** выразите через z, H, R, L, ω, g и h .

E2 Найдите **численно** полные Джоулевы потери Q в кольце за время его разгона. Приведите ответ с двумя значащими цифрами. **1.3**

E3 Найдите **численно** механическую энергию E , переданную кольцу за время его разгона. Приведите ответ с двумя значащими цифрами. **0.3**

E4 Найдите **численно** КПД η Томсоновского индукционного ускорителя. Приведите ответ с двумя значащими цифрами. **0.2**