

Road to IPhO

Регулярная прецессия гироскопа

Оборудование

1. Гироскоп в кардановом подвесе
2. Осциллограф **аналоговый**
3. Генератор сигналов
4. Набор грузов
5. Секундомер с памятью этапов

На отдельном столе:

6. Отдельный ротор гироскопа
7. Металлический цилиндр
8. Весы
9. Крутильный маятник
10. Штангенциркуль

Теоретическое введение

Уравнения движения твердого тела можно записать в виде

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (2)$$

Здесь (1) выражает закон движения центра масс тела, а (2) — уравнение моментов. Поскольку твердое тело имеет только шесть степеней свободы, этих двух векторных уравнений достаточно для полного описания состояния его движения.

Если сила \vec{F} не зависит от угловой скорости, а момент \vec{M} — от скорости поступательного движения, то уравнения (1) и (2) можно рассматривать независимо друг от друга. В баллистике, например при движении снаряда в воздухе, это невозможно. В случае же, когда такое раздельное рассмотрение возможно, уравнение (1) соответствует просто задаче о движении материальной точки, а уравнение (2) — задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. В данной работе рассматривается последняя из этих задач.

Момент импульса твердого тела в его главных осях x, y, z равен

$$\vec{L} = \vec{i}I_x\omega_x + \vec{j}I_y\omega_y + \vec{k}I_z\omega_z \quad (3)$$

где I_x, I_y, I_z — главные моменты инерции, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — компоненты вектора угловой скорости $\vec{\omega}$. Быстро вращающееся тело, для которого, например,

$$I_z\omega_z \gg I_x\omega_x, \quad I_y\omega_y,$$

принято называть гироскопом. Гироскоп называется уравновешенным, если его центр масс неподвижен. В силу (2) приращение момента импульса определяется интегралом

$$\Delta\vec{L} = \int \vec{M} dt. \quad (4)$$

Если момент внешних сил действует в течение короткого промежутка времени, из интеграла (4) следует, что приращение $\Delta\vec{L}$ момента импульса значительно меньше самого момента импульса:

$$|\Delta\vec{L}| \ll |\vec{L}|.$$

С этим связана замечательная устойчивость, которую приобретает движение гироскопа после приведения его в быстрое вращение.

Выясним, какие силы надо приложить к гироскопу, чтобы изменить направление его оси. Рассмотрим для примера маховик, вращающийся вокруг оси z , перпендикулярной к плоскости маховика (рис. 1). Будем считать, что

$$\omega_z = \omega_0, \quad \omega_x = 0, \quad \omega_y = 0.$$

Road to IPhO

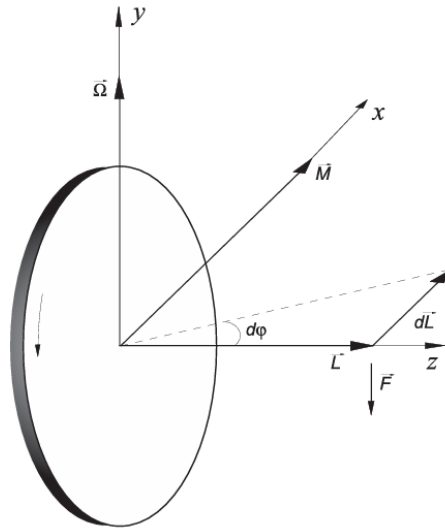


Рис. 1. Маховик

Пусть ось вращения повернулась в плоскости zx по направлению к оси x на бесконечно малый угол $d\varphi$. Такой поворот означает добавочное вращение маховика вокруг оси y , так что

$$d\varphi = \Omega dt,$$

где Ω — угловая скорость такого вращение. Будем предполагать, что

$$L_{\Omega} \ll L_{\omega_0}. \quad (5)$$

Это означает, что момент импульса маховика, равный $I_z \omega_0$ до приложения внешних сил, только повернется в плоскости zx по направлению к оси x не изменяя своей величины. Таким образом,

$$|d\vec{L}| = L d\varphi = L \Omega dt.$$

Но это изменение направлено вдоль оси x , поэтому вектор $d\vec{L}$ можно представить в виде векторного произведения вектора угловой скорости $\vec{\Omega}$, направленного вдоль оси y , на вектор собственного момента импульса маховика, направленного вдоль оси z ,

$$d\vec{L} = \vec{\Omega} \times \vec{L} dt.$$

т.е.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}. \quad (6)$$

Полученное уравнение имеет простой смысл: вектор \vec{L} (а значит и ось гироскопа) вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$ и неизменен по модулю (действительно, если некий радиус-вектор \vec{r} вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$, то скорость его конца, согласно определению вектора $\vec{\omega}$, равна $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$).

Окончательно, в силу (2) имеем

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}. \quad (7)$$

Формула (7) справедлива, если выполнено условие (5). Она позволяет определить момент сил \vec{M} , который необходимо приложить к маховику для того, чтобы вызвать вращение оси маховика с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Мы видим, таким образом, что для поворота оси вращающегося маховика к оси x необходимо приложить силы, направленные не вдоль оси x , а вдоль оси y , так чтобы их момент \vec{M} был направлен вдоль оси x .

Под действием момента \vec{M} внешних сил ось гироскопа медленно вращается вокруг оси y с угловой скоростью Ω . Такое движение называется регулярной прецессией гироскопа. В частности, создающей момент внешней силой может оказаться сила тяжести, если центр масс гироскопа не совпадает с точкой подвеса. Для гироскопа массой m_{Γ} , у которого ось собственного вращения наклонена на угол α от вертикали, скорость прецессии, происходящей вокруг вертикальной оси под действием силы тяжести, равна

$$\Omega = \frac{M}{I_z \omega_0 \sin \alpha} = \frac{m_{\Gamma} g l_{\Pi} \sin \alpha}{I_z \omega_0 \sin \alpha} = \frac{m_{\Gamma} g l_{\Pi}}{I_z \omega_0}, \quad (8)$$

где l_{Π} — расстояние от точки подвеса до центра масс гироскопа, т. е. скорость прецессии не зависит от угла α .

Road to IPhO

Для изучения регулярной прецессии уравновешенного гироскопа к его оси подвешивают дополнительные грузы. Это смещает общий центр масс и создает момент сил тяжести, вызывающий прецессию. Скорость прецессии в этом случае равна

$$\Omega = \frac{mg l}{I_2 \omega_0}, \quad (9)$$

где m — масса груза, l — расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа (рис. 3).

Описание установки

В данной работе исследуется регулярная прецессия уравновешенного гироскопа.

Уравновешенный гироскоп, закрепленный в кольцах карданова подвеса, показан на рис. 2. Наружное кольцо подвеса А может свободно поворачиваться вокруг вертикальной оси aa . Внутреннее кольцо Б связано с кольцом А горизонтальной осью bb . В кольце Б укреплен гироскоп, ось вращения которого vv перпендикулярна к оси bb . Центр масс гироскопа находится на пересечении всех трех осей и при любом повороте колец сохраняет свое положение в пространстве. Получается, что гироскоп как бы подвешен за центр масс.

Экспериментальная установка для исследования прецессии уравновешенного гироскопа показана на рис. 3. Ротором гироскопа является ротор высокооборотного электромотора М. Кожух мотора (статор) скреплен с кольцом Б (рис. 2 и 3). Мотор с кольцом Б может вращаться в кольце А вокруг горизонтальной оси bb , которое может вращаться вокруг вертикальной оси aa . Ротор электромотора представляет массивный стальной цилиндр с прожилками меди, образующими «беличье колесо». Обозначенный на рис. 3 буквой С рычаг направлен по оси симметрии ротора. На рычаг подвешивают грузы 5. Подвешивая различные грузы, можно менять силу F , момент которой определяется расстоянием l от точки подвеса до горизонтальной оси кольца А (до центра масс гироскопа), указанным на самой установке.

Выше при выводе формул для прецессии предполагалось, что действующие на гироскоп силы лежат в плоскости zy , в которой лежат векторы угловых скоростей собственного вращения и прецессии. В этом случае, как уже говорилось, момент сил меняет лишь направление момента импульса гироскопа, но не его величину. Силы трения не лежат в плоскости осей вращения. Они приводят к изменению момента импульса и по направлению, и по величине. Для ротора гироскопа действие сил трения скомпенсировано действием электромотора. Для осей карданова подвеса компенсации нет. В результате ось гироскопа будет опускаться в направлении действия груза. Читателю предлагается проанализировать роль сил трения и оценить погрешности, которые возникнут при определении скорости вращения гироскопа относительно его оси симметрии ω_0 , связанные с постепенным опусканием оси гироскопа.

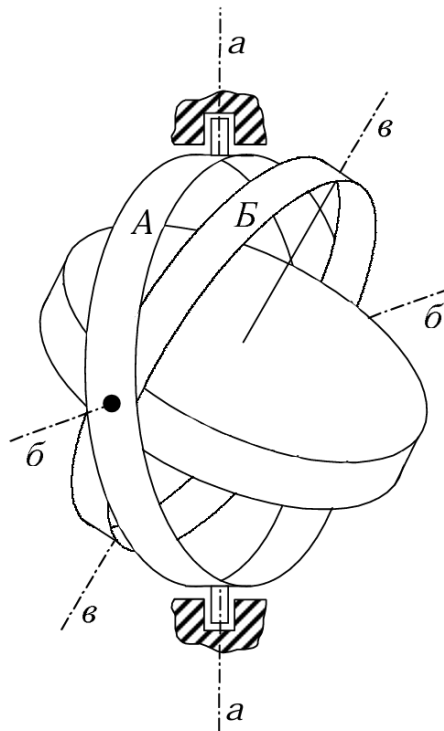


Рис. 2. Гироскоп в кардановом подвесе

Road to IPhO

Часть А. Регулярная прецессия (7 баллов)

В первой части работы исследуется зависимость скорости прецессии гироскопа от момента силы, приложенной к его оси. Измерение скорости прецессии гироскопа позволяет вычислить угловую скорость вращения его ротора.

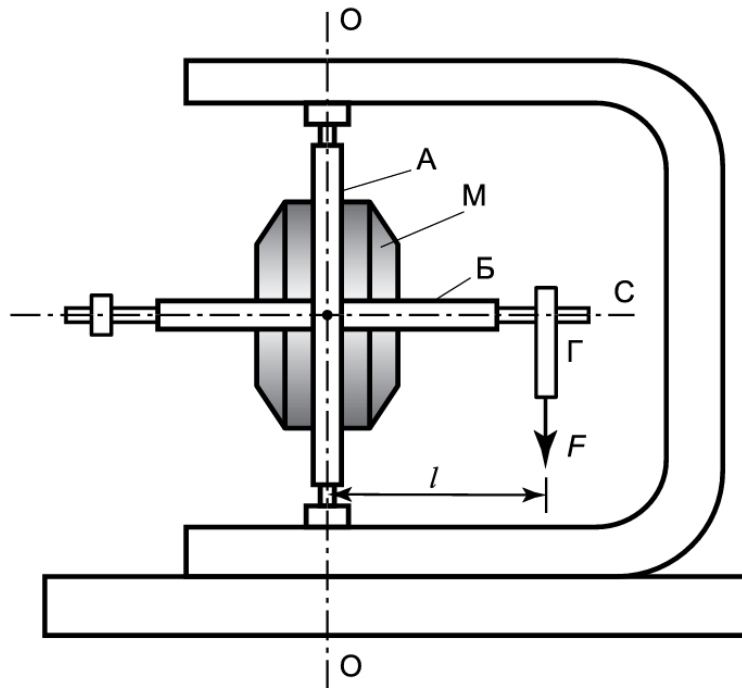


Рис. 3. Схема экспериментальной установки

Момент инерции ротора относительно оси симметрии I_0 можно измерить по крутильным колебаниям точной копии ротора, подвешиваемой вдоль оси симметрии на жесткой проволоке.

A1 Выразите период крутильных колебаний T_0 через момент инерции I_0 и модуль кручения проволоки k . **0.2**

Поскольку модуль кручения проволоки неизвестен, можно определить момент инерции, подвесив к проволоке вместо ротора цилиндр с легко измеримыми размерами и массой.

A2 Измерьте как можно точнее период крутильных колебаний ротора T_0 и цилиндра T_1 . Измерьте массу цилиндра M , его высоту H и радиус R . Получите формулу для момента инерции ротора гироскопа и вычислите его. **0.7**

Скорость вращения гироскопа можно определить и без измерения прецессии. У используемых в работе гироскопов статор имеет две обмотки: одна обмотка используется для раскрутки гироскопа, а вторая — для измерения числа оборотов ротора. Вращаясь, ротор наводит во второй обмотке переменную ЭДС, которую можно измерить с помощью осциллографа.

Для удобства измерения используется следующий метод. Подключите выход вторичного ротора гироскопа к первому каналу аналогового осциллографа, а генератор сигналов — ко второму каналу. Переключите осциллограф в режим развёртки XY. Если частоты ротора и генератора близки друг к другу, на экране будет виден медленно меняющий свою форму эллипс. При полном совпадении частот эллипс «застывает», что несложно наблюдать с хорошей точностью.

A3 Измерьте как можно точнее частоту вращения гироскопа f_0 . **0.2**

Road to IPhO

Установите ось гироскопа в горизонтальное положение, осторожно поворачивая ее за рычаг С. Включите питание гироскопа и подождите 4 – 5 минут, чтобы вращение ротора успело стабилизироваться. Убедитесь в том, что ротор вращается достаточно быстро: при легком постукивании по рычагу С последний не должен изменять своего положения в пространстве.

A4 Отклоните рычаг С на $5 - 6^\circ$ вверх от горизонтальной плоскости. Подвесьте к рычагу С один из грузов 4. При этом должна начаться прецессия гироскопа. Найдите угловую скорость регулярной прецессии Ω . Измерения продолжайте до тех пор, пока рычаг С не опустится на $5 - 6^\circ$ ниже горизонтальной плоскости, сделав целое число оборотов относительно вертикальной оси. Повторите этот опыт не менее пяти раз. Усредните полученные результаты. **0.5**

A5 Проведите всю серию экспериментов, описанных в пункте **A4**, при всех возможных значениях момента M силы F относительно центра масс гироскопа (длина плеча l указана на установке). Постройте график зависимости Ω от M . **5.0**

A6 Вычислите частоту вращения гироскопа f_0 , используя результаты **A2** и **A5**. Сравните с результатами **A3**. **0.5**

Часть В. Момент силы трения (3 балла)

Выключите питание ротора гироскопа. Из-за наличия трения в оси гироскоп будет замедляться. Эта часть задачи посвящена определению момента сил трения.

B1 Снимите зависимость угловой скорости гироскопа ω от времени в диапазоне $t \in [0, 5 \text{ мин}]$. Постройте график. **2.5**

B2 Вычислите момент сил трения $M_{\text{тр}}$, действующих на гироскоп. **0.4**

Регулярная прецессия гироскопа

A1

$T_0 =$

A2

$M =$

$H =$

$R =$

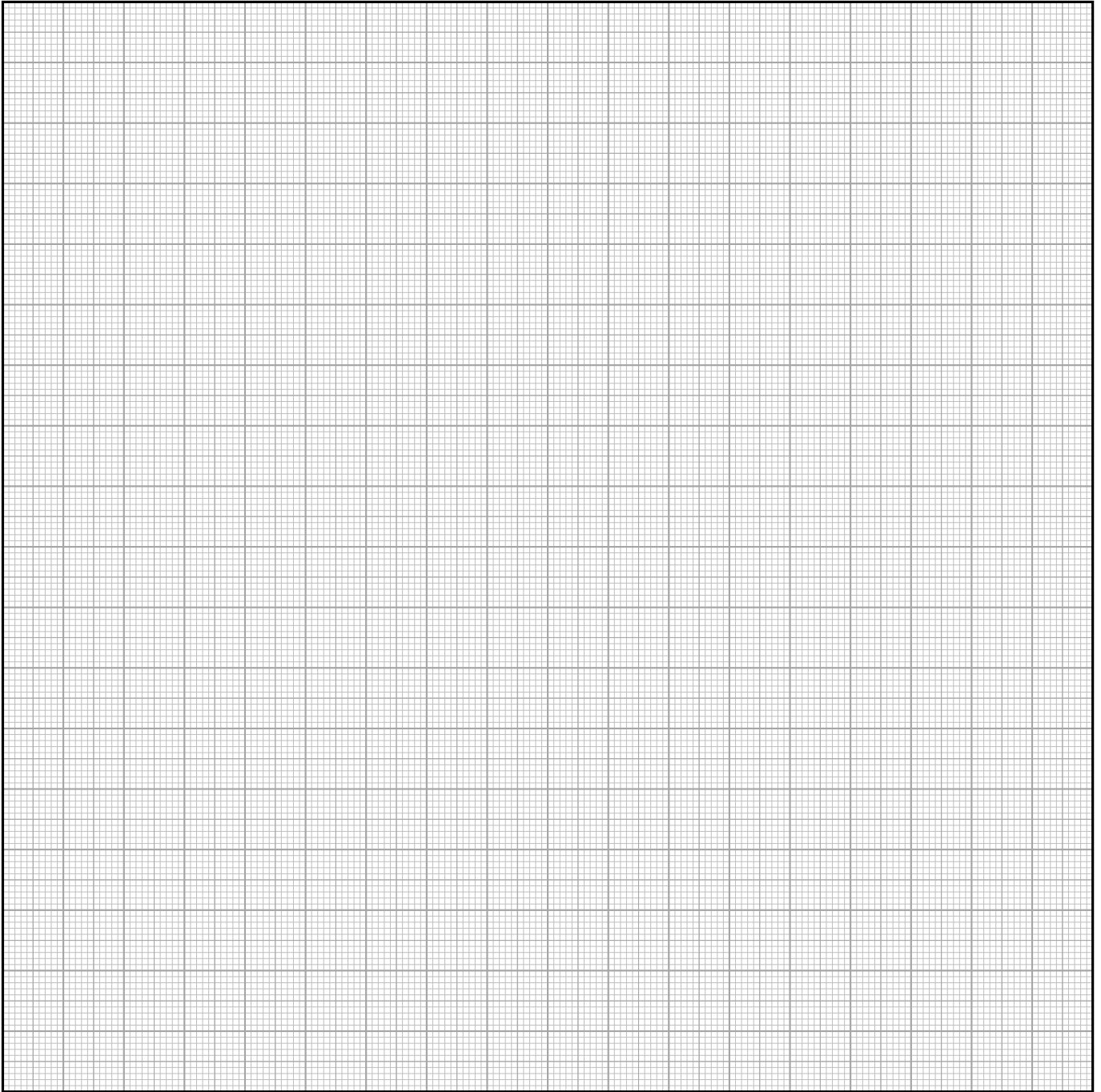
$I_0 =$

A3

$f_0 =$

A4

A5

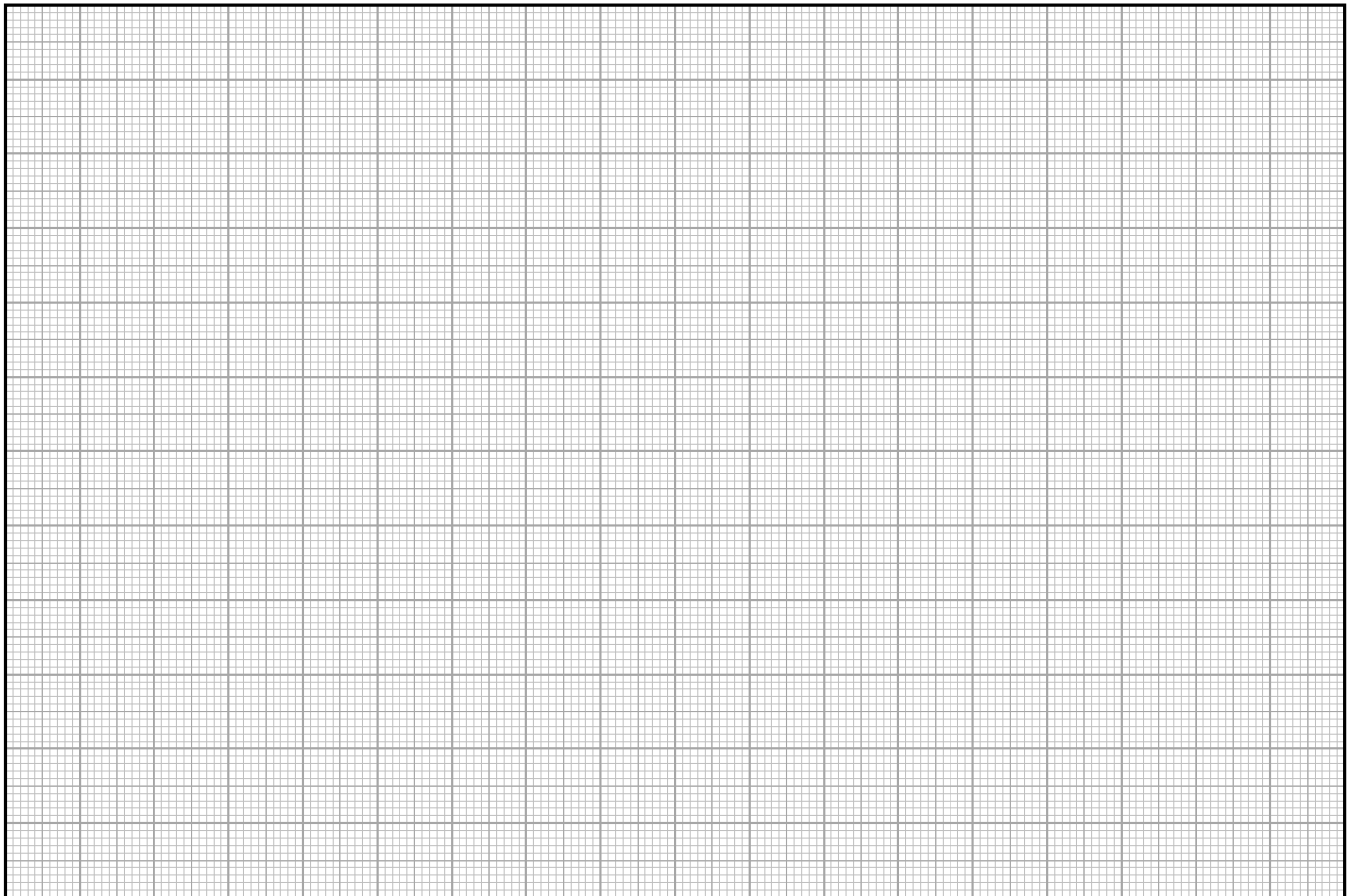


A6

f_0

– совпадает / не совпадает с A3

B1

**B2** $M_{fr} =$