

Road to IPhO

Сферические aberrации (12 баллов)

Аберрация оптической системы – ошибка или погрешность изображения в оптической системе, вызываемая отклонением луча от того направления, по которому он должен был бы идти в идеальной оптической системе. Аберрации можно характеризовать на основе и геометрической, и волновой оптики. В зависимости от различных параметров (координат лучей и углов падения) оптическая система может проявлять различные аберрации (и их композиции): сферическую аберрацию, кому, астигматизм и пр. В этой задаче в рамках геометрической оптики исследуется только сферическая аберрация монохроматического света. Рассматриваются только линзы со сферическими поверхностями. Сферическая аберрация возникает из-за несовпадения фокусов для лучей света, проходящих на разных расстояниях от оптической оси.

Обратите внимание, что в части **С** задание состоит в доказательстве некоторых соотношений. Если вы не справитесь с этим, вы все равно можете использовать приведенные соотношения для решения частей **Д** и **Е** задачи.

В задаче вы должны будете проделать много вычислений. Для удобства при описании аберраций вводятся некоторые договоренности о наименованиях величин. Этих договоренностей нужно обязательно придерживаться в своем решении:

- Все величины, которые относятся к тому, что происходит **ПОСЛЕ** преломляющей поверхности – штрихованные, а те, что **ДО** преломляющей поверхности – нештрихованные.
- (Задним) фокусом F' линзы называется точка схождения параллельного парааксиального пучка лучей, падающего на собирающую линзу. Для рассеивающей линзы понятие вводится аналогично. Передний фокус F линзы в этой задаче нас интересовать не будет.
- Фокальной плоскостью называется плоскость перпендикулярная оптической оси, проходящая через фокус линзы.
- Продольной сферической аберрацией $\delta s'$ называется расстояние между точкой F' и точкой пересечения с оптической осью преломленного крайнего луча пучка.
- Величина сферической аберрации считается положительной, если крайние лучи сходятся дальше от линзы, чем фокус. Величина сферической аберрации считается отрицательной, если крайние лучи сходятся ближе к линзе, чем фокус. Ответы должны всегда даваться с учетом знака.
- Поперечной сферической аберрацией $\delta g'$ называется радиус кружка рассеяния, наблюдаемый в фокальной плоскости.
- Различные точки на рисунке (на линзе, луче, пересечения) обозначаются заглавными буквами. Указывая точку, выделите ее (жирный кружок).
- Различные расстояния между точками обозначаются строчными буквами. Если в решении необходимо ввести какую-то величину расстояния, помимо указания ее на рисунке, напишите ее явно рядом с рисунком, например, $OA = a$.
- Расстояние от оптической оси до произвольного рассматриваемого луча обозначается буквой h . Полная ширина симметричного пучка – $2H$.
- Расстояния вдоль оптической оси от преломляющей поверхности до точек пересечения лучей с оптической осью обозначаются s (для лучей до преломления) и s' (после преломления). А сами точки S и S' , соответственно. Для s и s' важен выбор знака. Нулем принято считать точку пересечения преломляющей поверхности и оптической оси.

В задаче рассматривается следующая поправка к парааксиальной оптике, т.е. можно будет считать, что h малы по сравнению с радиусами кривизны поверхностей. Но т.к. в задаче исследуются именно малые эффекты аберраций, то при получении ответов, разлагая в ряд Тейлора, необходимо удерживать соответствующие слагаемые.

Часть А. Прямые построения аберраций (0.75 балла)

В этой части задачи необходимо точно (количественно) построить ход запрашиваемых лучей в линзах в листе ответов. Для чернового построения или тренировки используйте дополнительные листы. В листе ответов должно быть окончательное построение. Крайне желательно без исправлений. Толщина лучей в листе ответов не должна превышать 1 мм.

Road to IPhO

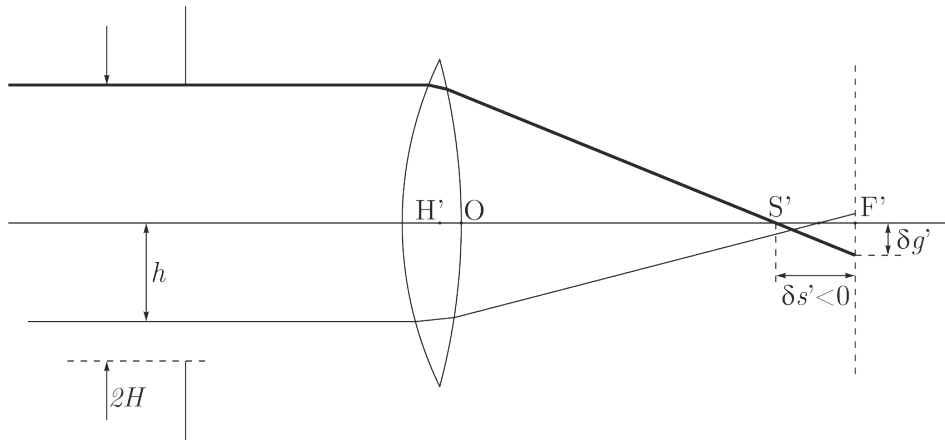


Рис. 1

A1 Постройте точно ход лучей в плоско-выпуклых и в плоско-вогнутой линзе. Радиусы кривизны поверхностей $R = 5$ см, показатель преломления стекла $n = 1.5$. Укажите точку F' схождения (расхождения) параллельного параксиального пучка. **0.45**

A2 Измерьте величину максимальной сферической aberrации $\delta s'$ для всех построений. Запишите результаты (в мм) в лист ответов. **0.3**

Часть В. Расчет aberrаций «в лоб» (3.75 балла)

Рассмотрим простейшую оптическую систему, для которой можно не громоздко рассчитать величину сферической aberrации: плоско-выпуклая тонкая линза. На плоскую сторону линзы падает пучок света, параллельный оптической оси. Для «тонкой линзы» можно пренебречь ее толщиной. Также можно считать, что точки O и H' (рис. 1) находятся в центре линзы. Радиус кривизны поверхности выпуклой поверхности равен R , показатель преломления линзы – n .

B1 Чему равно фокусное расстояние f' для тонкой плоско-выпуклой линзы? **0.25**

B2 Для данной линзы найдите зависимость величины продольной сферической aberrации $\delta s'$ от полуширины пучка h . Ответ выразите через R , n и h . Запишите приближенное выражение для $\delta s'(h)$, разложив ответ в ряд Тейлора по степеням h до h^2 . Постройте схематический график полученной зависимости. **1.5**

B3 Найдите величину поперечной сферической aberrации $\delta g'$. Ответ выразите через $\delta s'$, f' и h . **0.5**

Рассмотрим теперь, как выглядит распределение интенсивности в кружке рассеяния, наблюдаемого в фокальной плоскости. Пусть на плоскую сторону плоско-выпуклой линзы падает широкий пучок света.

B4 Разобьем кружок рассеяния кольцами радиусов $0.2\delta g'$, $0.4\delta g'$, $0.6\delta g'$, $0.8\delta g'$. С какой доли (в %) поперечной площади падающего пучка собираются лучи в центральный круг (радиуса $0.2\delta g'$)? С какой доли (в %) поперечной площади падающего пучка собираются лучи в последующие кольца (между $0.2\delta g'$ и $0.4\delta g'$ и так далее соответственно)? Какую долю площади кружка рассеяния занимает каждое кольцо? Сведите все расчеты в таблицу в листе ответов. Постройте схематический график зависимости интенсивности света от радиальной координаты в кружке рассеяния. **1.5**

Road to IPhO

Часть С. Теория aberrаций (1 балл)

Для начала рассмотрим одну сферическую поверхность, на которой будет происходить преломление (напомним, что линза – это две преломляющие поверхности). Т.к. предметом для этой преломляющей поверхности может быть изображение, созданное другой преломляющей поверхностью, то в общем случае и предмет, и изображение могут иметь продольную aberrацию (δs и $\delta s'$, соответственно). Исходный же предмет, реальный объект, aberrацией, конечно, не обладает.

Вашей задачей будет показать справедливость следующего соотношения (с точностью до более высоких порядков h):

$$\frac{n'\delta s'}{s'^2} - \frac{n\delta s}{s^2} = -\frac{h^2}{2}Q^2(s) \left(\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns} \right),$$

где $Q(s) = n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) = n' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'} \right) = \text{inv}$.

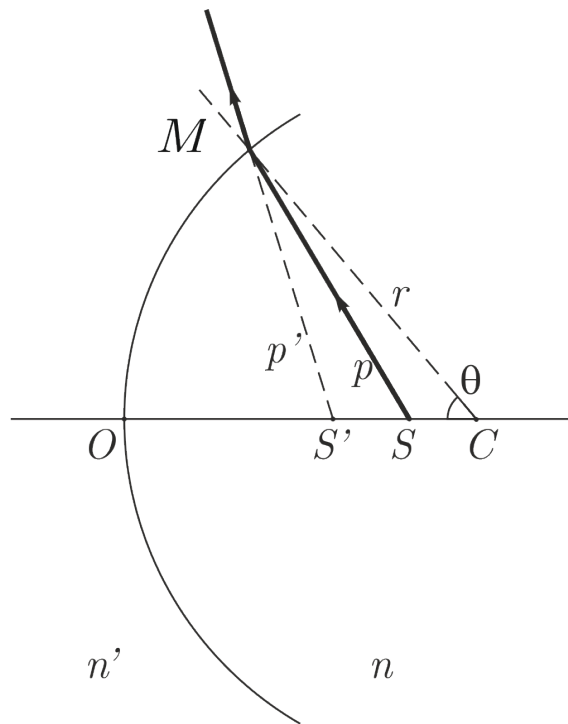


Рис. 2

Сначала требуется получить некоторое инвариантное соотношение на геометрические параметры. Под словом «инвариантное» в данном случае понимается сохранение вида зависимости для параметров до преломления луча и после.

C1 Используя теорему синусов для треугольников MSC и $MS'C$, а также закон преломления Снеллиуса, получите инвариант вида $n \cdot f(r, s, p) = n' \cdot f(r, s', p') = \text{inv}$. **0.3**

C2 Воспользовавшись теоремой косинусов в треугольнике MSC , перейдите в инварианте от величины p к углу θ . Считая угол θ малым, разложите множители в виде корней в ряд Тейлора до первого слагаемого с ненулевой степенью θ . Разделите полученное приближенное значение на « $-r$ » и получите приведенное значение инварианта. **0.1**

Все, что описано выше, относится просто к явлению преломления. Чтобы перейти к величинам aberrаций, нужна некая точка, от которой их отсчитывать. Так же как и в части **B**, за такую точку выберем точку схождения (исхождения) параксиальных лучей (т.е. для которых $\theta = 0$). Расстояния для этих точек нужно обозначить s_0 и s'_0 . Соответственно, для непараксиальных лучей можно будет учесть величины aberrаций: $s = s_0 + \delta s$ и $s' = s'_0 + \delta s'$.

Road to IPhO

C3 Записав инвариант из пункта C2 для параксиальных лучей до и после преломления, покажите инвариантность величины $Q(s_0)$. **0.1**

C4 Левая часть инварианта, полученного в C2, является функцией f от s и θ . Найдите значение $f(s, \theta) - f(s_0, \theta)$. **0.1**
Считайте, что δs и θ являются малыми параметрами.

C5 Используя результаты предыдущих пунктов, выразив малый угол θ через радиус кривизны поверхности и малую высоту h , получите искомое соотношение: **0.2**

$$\frac{n' \delta s'}{s_0'^2} - \frac{n \delta s}{s_0^2} = -\frac{h^2}{2} Q^2(s_0) \left(\frac{1}{n' s_0'} - \frac{1}{n s_0} \right).$$

Как правило оптические системы состоят включают в себя много сферических поверхностей (например, линза – 2, примитивный микроскоп (две линзы) – 4 и т.п.). Доказанное выше соотношение можно последовательно применить для каждой преломляющей сферической поверхности, связав в итоге абerrацию предмета и конечного изображения, не рассчитывая промежуточные абerrации.

Рассмотрим несколько преломляющих поверхностей (на рисунке 3 их две). Введем малые углы $\alpha_i = \frac{h_i}{s_i}$ и $\alpha'_i = \frac{h_i}{s'_i}$.

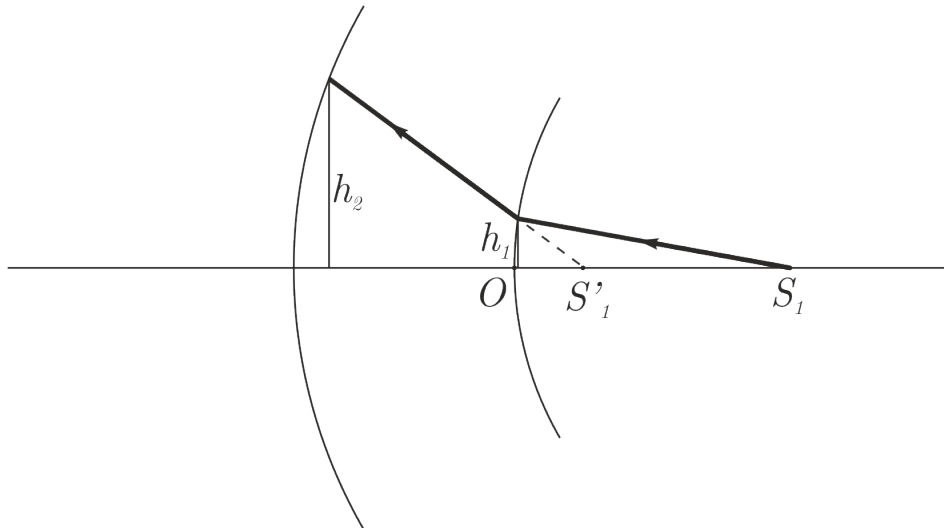


Рис. 3

C6 Покажите, что абerrации предмета и изображения после k -й преломляющей поверхности, связаны соотношением: **0.2**

$$n'_k \delta s'_k \alpha_k'^2 - n_1 \delta s_1 \alpha_1^2 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k h_i^4 Q_i^2(s) \left(\frac{1}{n'_i s'_i} - \frac{1}{n_i s_i} \right).$$

Иными словами, для вычисления суммарной абerrации нужно по всем поверхностям сложить правые части доказанного соотношения, умноженного на h_i^2 .

Road to IPhO

Часть D. Оптимальная собирающая линза (3.5 балла)

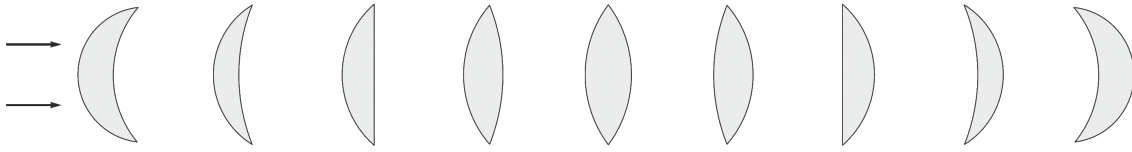


Рис. 4

Результаты, полученные в части C можно без вывода использовать здесь и далее.

В этой части задачи необходимо рассчитать параметры собирающей линзы, для которой минимизировалась бы сферическая aberrация для падающего параллельного пучка света.

Требуется изготовить тонкую собирающую линзу фокусным расстоянием $f' = 10$ см из стекла с показателем преломления $n = 1.5$. Т.к. линзу нужно считать тонкой, то для двух преломляющих поверхностей можно считать, что $h_1 = h_2 = h$. Ясно, что система обладает одним оптимизационным параметром – радиусом кривизны одной из поверхностей, т.к. второй радиус однозначно определен показателем преломления и фокусным расстоянием.

D1 Найдите сферическую aberrацию $\delta s'_2$ тонкой собирающей линзы для падающего параллельного пучка света. Примените результат пункта C6 для двух преломляющих поверхностей и формулу тонкой линзы, оставив зависимость только от радиуса кривизны первой поверхности (куда падает исходный пучок света). Ответ выразите через показатель преломления n и обратные величины $\rho = 1/r$ и $\varphi = 1/f'$. **2.0**

D2 Найдите значение ρ^* , при котором сферическая aberrация $\delta s'_2$ минимальна. Ответ выразите через n и φ . **0.5**

D3 Рассчитайте значение радиусов кривизны поверхностей линзы. Нарисуйте (качественно) вашу рассчитанную линзу в листе ответов. **0.5**

Линзы с заданным фокусным расстоянием могут быть изготовлены с различными радиусами кривизны поверхностей.

D4 Схематично изобразите график зависимости модуля продольной сферической aberrации $\delta s'_2$ для линз, приведенных на рисунке 4. **0.5**

Часть E. Исправление aberrаций дефокусировкой (3 балла)

С помощью дефокусировки (смещения плоскости наблюдения от фокальной к плоскости ближе/дальше от линзы) можно добиться уменьшения кружка рассеяния, наблюдаемого на экране.

Пусть на линзу падает широкий параллельный пучок света, и наблюдаемая продольная сферическая aberrация равна $\delta s'$.

E1 В какую сторону и на какое расстояние нужно сместить плоскость наблюдения от фокальной плоскости, чтобы кружок рассеяния был минимального размера? **1.5**

E2 Постройте схематический график зависимости интенсивности света от радиальной координаты в минимальном кружке рассеяния. Для этого выполните шаги, аналогичные пункту B4. **1.5**