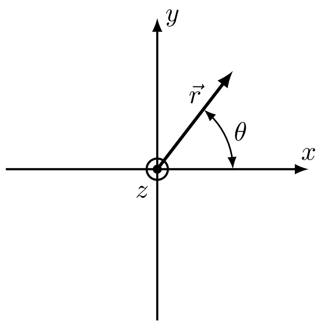
# Эффект Герца-Квинке (12 баллов)

Спонтанное вращение малых сферических и цилиндрических объектов, погруженных в жидкие диэлектрики и подверженных воздействию сильных электростатических полей, впервые было зафиксировано Георгом Квинке в 1896 году. В экспериментах Квинке использовал стеклянные шары и цилиндры, подвешенные на шелковых нитях. В настоящее время этот эффект удалось воспроизвести для капель жидкости и диэлектрических шаров, плавающих в проводящей жидкости.

Во всей задаче будем использовать цилиндрическую систему координат $r, \theta, z$, ось $z$ которой направлена вдоль оси симметрии цилиндра, $r$ – расстояние от точки до оси цилиндра, а $\theta$ – угол в плоскости, перпендикулярной оси. Вектор $\vec{r}$ перпендикулярен оси $z$ и направлен от оси к рассматриваемой точке. Также используются декартовы координаты $x$ и $y$, в этом случае ось $x$ отвечает $\theta = 0$, а ось $y$ – $\theta = \pi/2$.




Электрическую постоянную $\varepsilon_0$ можно использовать во всей задаче.

### Часть А. Электростатика (4.0 балла)

**A1** Бесконечная однородно заряженная тонкая нить находится в вакууме. Нить расположена по оси $z$, линейная плотность заряда $\kappa$. Определите зависимость электростатического потенциала этой нити $\varphi(r)$ во всем пространстве с точностью до константы. Ответ выразите через $\varepsilon_0$, $\kappa$, $r$. **0.4**

**A2** Теперь добавим вторую нить с противоположной линейной плотностью заряда $-\kappa$, параллельную исходной, на очень малом расстоянии до нее. Дипольный момент единицы длины данной конструкции постоянен и равен $\vec{p}$. Определите зависимость электростатического потенциала этой дипольной линии $\varphi(\vec{r})$ во всем пространстве. Потенциал на большом расстоянии от дипольной линии стремится к нулю. Ответ выразите через $\varepsilon_0$, $\vec{p}$, $\vec{r}$. **0.4**

**A3** Дифференцируя выражение, полученное в предыдущем пункте, найдите электрическое поле $\vec{E}(\vec{r})$ во всем пространстве. Ответ выразите через $\varepsilon_0$, $\vec{p}$, $\vec{r}$. **0.6**

Рассмотрим длинный однородный непроводящий цилиндр из вещества с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1$, помещенный в бесконечную среду с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2$. Ось симметрии цилиндра совпадает с осью $z$, радиус цилиндра $R$, длина $L \gg R$. Внешнее однородное электрическое поле $\vec{E}_0$ направлено перпендикулярно оси симметрии цилиндра. Всеми краевыми эффектами, связанными с конечной длиной цилиндра, пренебрегайте.

**A4** Покажите, что распределение поля в пространстве вне цилиндра равно суперпозиции однородного внешнего поля $\vec{E}_0$ и поля дипольной линии с линейной плотностью дипольного момента $\vec{p}$. Используйте выражение для поля дипольной линии в вакууме. Определите $\vec{p}$. Ответ выразите через $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\vec{E}_0$, $\varepsilon_0$, $R$. Найденное вами значение $\vec{p}$ включает в себя как дипольный момент цилиндра, так и дипольный момент поляризационных зарядов среды. **0.6**

**A5** Определите зависимость электрического поля $\vec{E}(\vec{r})$ во всем пространстве. Ответ выразите через $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\vec{E}_0$, $\vec{r}$. **0.3**

**A6** Пусть проводимость и диэлектрическая проницаемость цилиндра $\lambda_1$, $\varepsilon_1$, а окружающей среды $\lambda_2$, $\varepsilon_2$. Электрическое поле на большом расстоянии от цилиндра $\vec{E}_0$. Распределение тока полностью установилось. Известно, что поле снаружи цилиндра все еще равно суперпозиции внешнего поля и поля диполя, а поле внутри цилиндра однородно. Однако теперь на поверхности цилиндра возникает распределение свободных (не связанных с поляризацией) зарядов с плотностью $\sigma_f(\theta)$. Определите объемную плотность тока $\vec{j_1}$ внутри цилиндра и поверхностную плотность заряда $\sigma_f(\theta)$ в зависимости от угла $\theta$. Направлению $\vec{E}_0$ отвечает $\theta = 0$. **1.0**

**Примечание**: в проводящей среде объемная плотность тока связана с электрическим полем соотношением $\vec{j} = \lambda\vec{E}$, где $\lambda$ – проводимость среды.

**Примечание:** граничные условия на нормальные компоненты электрического поля можно получить, рассматривая нормальные составляющие плотности тока на границе цилиндра и среды. По цилиндру не течет поверхностных токов.

**A7** Пусть теперь цилиндр идеально проводящий, а проводимость окружающей его среды $\lambda_2$, ее диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_2$. Внешнее электрическое поле отсутствует. Начальный заряд цилиндра равен $q_0$. Найдите зависимость заряда цилиндра $q(t)$ от времени. Получите выражение для времени $\tau_2$, за которое заряд цилиндра уменьшается в 2 раза. Ответы выразите через $\lambda_2$, $\varepsilon_0$, $\varepsilon_2$. **0.7**

### Часть B. Вращающийся цилиндр (5.0 балла)

Пусть цилиндр из предыдущей части вращается с угловой скоростью $\omega$ вокруг своей оси. Считаем, что $\omega > 0$ если угловая скорость направлена вдоль оси $z$. Положительное направление отсчета угла $\theta$ совпадает с направлением вращения цилиндра. Проводимость цилиндра равна $\lambda_1$, а проводимость среды – $\lambda_2$, диэлектрическая проницаемость цилиндра равна $\varepsilon_1$, а среды – $\varepsilon_2$. В среде на большом расстоянии от цилиндра создано однородное внешнее электрическое поле $\vec{E}_0$, направление которого соответствует $\theta = 0$.

Во всех последующих пунктах задачи примите следующие допущения:

- В установившемся режиме заряд стационарно распределен в пространстве **относительно лабораторной системы отсчета.**
- Рассматриваемые в задаче токи достаточно малы, поэтому магнитным полем полностью пренебрегайте.

Рассмотрим границу цилиндра и жидкости. Величины, относящиеся к внутренней части цилиндра будем обозначать индексом 1, а величины снаружи цилиндра – индексом 2. Нормальные ($n$) и касательные ($\tau$) составляющие электрического поля обозначим соответственно $E_{1n}$, $E_{2n}$, $E_{1\tau}$, $E_{2\tau}$. Положительное направление нормали направлено наружу. За счет внешнего тока на поверхности цилиндра накапливаются свободные заряды с поверхностной плотностью $\sigma_f(\theta)$. В ответы во всех пунктах этой части могут входить проводимости и диэлектрические проницаемости этих сред.

**B1** Запишите соотношение между касательными компонентами электрических полей на границе раздела среды и цилиндра. **0.1**

**B2** При движении цилиндра свободные заряды на поверхности цилиндра вращаются вместе с ним. Поэтому на поверхности цилиндра возникает поверхностная плотность тока $i(\theta)$. Выразите ее через $\omega$, $R$ и плотность свободных зарядов. Величина $i(\theta)$ считается положительной, если ток направлен в сторону возрастания $\theta$. **0.5**

**B3** Рассмотрим малый участок поверхности цилиндра, отвечающий интервалу углов $(\theta_0, \theta_0 + \mathrm{d}\theta)$ площади $\mathrm{d}S = RL\,\mathrm{d}\theta$. Через границы $\theta = \theta_0$ в него втекает заряд за счет $i(\theta_0)$, через границу при $\theta = \theta_0 + \mathrm{d}\theta$ вытекает ток за счет $i(\theta_0 + \mathrm{d}\theta)$. Также в него втекает нормальный ток с плотностью $j_{1n}$ и вытекает нормальный ток с плотностью $j_{2n}$. В установившемся режиме полный заряд рассматриваемой области не меняется. Запишите следующее из закона сохранения заряда соотношение между токами $i(\theta_0)$, $i(\theta_0 + \mathrm{d}\theta)$, $j_{1n}$, $j_{2n}$. В ответ также может входить $R$ и $\mathrm{d}\theta$. **0.7**

**B4** В соотношение из предыдущего пункта подставьте выражения для нормальных токов через нормальные компоненты электрического поля и поверхностных токов через плотность заряда. Получите связь между $E_{1n}$, $E_{2n}$, $\omega$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\partial\sigma_f/\partial\theta$. **0.5**

**B5** Выразите плотность свободных зарядов $\sigma_f$ через компоненты электрического поля вблизи границы. Используя результаты пункта **B4**, получите отсюда соотношение только между компонентами электрического поля $E_{1n}$, $E_{2n}$ и их производными по $\theta$. В ответ также могут входить $\varepsilon_1$, $\lambda_1$, $\varepsilon_2$, $\lambda_2$, $\omega$. **0.4**

Перейдем во вращающуюся систему отсчета цилиндра. В этой системе отсчета действующее на цилиндр электрическое поле вращается по часовой стрелке:

$$\vec{E} = E_0(\vec{e}_x \cos\omega t - \vec{e}_y \sin\omega t).$$

Далее удобно использовать комплексную запись

$$\vec{E} = \mathrm{Re}[\vec{E}_0^* e^{-i\omega t}],$$

где $\vec{E}_0^*$ – комплексная амплитуда электрического поля. Для рассматриваемого поля она имеет вид $\vec{E}_0^* = E_0(\vec{e}_x - i\vec{e}_y)$. Направление осей $x$, $y$ указано в начале задачи. Аналогичным образом можно записать однородное электрическое поле внутри цилиндра $\vec{E}_1$ и его линейную плотность дипольного момента:

$$\vec{E}_1 = \mathrm{Re}[\vec{E}_1^* e^{-i\omega t}], \quad \vec{p} = \mathrm{Re}[\vec{p}^* e^{-i\omega t}].$$

Аналогично можно записать уравнения для любой компоненты поля в любой точке. Тогда оказывается, что граничные условия из пункта B3 можно переписать в виде

$$\varepsilon_1^*(\omega) E_{1n}^* = \varepsilon_2^*(\omega) E_{2n}^*,$$

где $\varepsilon_1^*(\omega)$, $\varepsilon_2^*(\omega)$ – комплексные диэлектрические проницаемости.

**B6** Покажите, что выражения для комплексных проницаемостей можно записать в виде **0.5**

$$\varepsilon_1^* = \varepsilon_1 + \frac{i\lambda_1}{\varepsilon_0\omega}, \quad \varepsilon_2^* = \varepsilon_2 + \frac{i\lambda_2}{\varepsilon_0\omega}.$$

**Далее эти формулы можно использовать без доказательства.**
**Примечание:** Поскольку цилиндр вращается с угловой скоростью $\omega$, $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = +\omega$ и производную по углу $\theta$ можно выразить через производную по времени во вращающейся системе отсчета.

Таким образом вид граничных условий формально совпадет с граничными условиями для неподвижного цилиндра. Поэтому выражения для $\vec{E}_1^*$ и $\vec{p}^*$ можно получить из выражения для дипольного момента цилиндра из **A4**, формально заменив диэлектрические проницаемости на комплексные значения.

**B7** Определите комплексную амплитуду линейной плотности дипольного момента цилиндра $\vec{p}^*$. Ответ выразите через $\varepsilon_1$, $\lambda_1$, $\varepsilon_2$, $\lambda_2$, $\omega$, $\varepsilon_0$, $R$, $\vec{E}_0^*$. **0.5**

Поскольку комплексная амплитуда $\vec{p}^*$ отличается от $\vec{E}_0^*$ только общим комплексным множителем, дипольный момент цилиндра повернут на постоянный угол относительно электрического поля. Значит, в лабораторной системе отсчета дипольный момент цилиндра постоянен. Его удобно вычислять в момент времени $t = 0$, когда угол поворота равен 0.

**B8** Определите проекции на оси $x$ и $y$ вектора $\vec{p}$ в лабораторной системе отсчета. **0.8**

Найденный выше дипольный момент совпадает с фактическим дипольным моментом цилиндра и поляризационных зарядов жидкости вокруг него, поэтому его можно использовать для вычисления момента сил.

**B9** Определите проекцию момента сил $M_E$, действующего на цилиндр (с окружающими его поляризационными зарядами среды) со стороны внешнего электрического поля, на ось $z$. Ответ выразите через $E_0$, $\varepsilon_0$, $\omega$, $\varepsilon_1$, $\lambda_1$, $\varepsilon_2$, $\lambda_2$, $R$, $L$. **0.6**

**B10** При определенном соотношении между параметрами системы полученный выше момент сил вызывает дальнейшее увеличение угловой скорости цилиндра. Укажите соотношение между параметрами, при котором это возможно. **0.4**

### Часть C. Цилиндр в жидкости (3.0 балла)

Максимальная угловая скорость, до которой может разогнаться цилиндр, ограничена силами вязкого трения. Пусть вязкость жидкости, окружающей цилиндр, равна $\eta$. Определим проекцию момента сил вязкого трения на ось $z$, $M_\eta$. Цилиндр можно по-прежнему считать очень длинным, $L \gg R$. Угловая скорость вращения цилиндра $\omega$. Распределение скоростей жидкости в каждый момент времени считайте установившимся.

**C1** Момент сил можно записать в виде $M_\eta = -\alpha \eta^a \omega^b R^c L^d$, где $\alpha$ – безразмерная постоянная. Используя метод размерностей и физические соображения, определите показатели степени $a$, $b$, $c$, $d$. **0.7**

При установившемся движении скорость жидкости $v(r)$ в каждой точке направлена по касательной к окружности с центром на оси цилиндра, проходящей через рассматриваемую точку. Величина скорости зависит только от расстояния до оси цилиндра. Для удобства вычисления силы вязкости введем угловую скорость жидкости $\omega(r)$ с помощью соотношения $v(r) = r\omega(r)$. Тогда касательное напряжение (т.е. отношение касательной силы к площади), создаваемое силами вязкости, равно

$$\tau_{\theta z} = \eta r \frac{\partial \omega(r)}{\partial r}.$$

**C2** Найдите момент сил вязкого трения $M$, действующий на внешнюю сторону цилиндрического слоя жидкости радиуса $r$, где $r > R$. Выразите ответ через $\eta$, $r$, $L$, $\frac{\partial \omega}{\partial r}$. **0.3**

**C3** Определите коэффициент $\alpha$ в формуле для момента сил $M_\eta$. **1.2**

**C4** Сообщим цилиндру маленькую угловую скорость $\delta\omega$. Если внешнее электрическое поле больше некоторого критического значения $E_0 > E_{cr}$, угловая скорость будет возрастать. Выразите критическое поле $E_{cr}$ через $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ $\varepsilon_0$, $\eta$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\alpha$. **0.3**

**C5** Пусть $E_0 > E_{cr}$. Определите установившуюся угловую скорость цилиндра $\omega_0$.
Ответ выразите через $E_0$, $E_{cr}$, $\varepsilon_0$, $\varepsilon_1$, $\lambda_1$, $\varepsilon_2$, $\lambda_2$. **0.5**