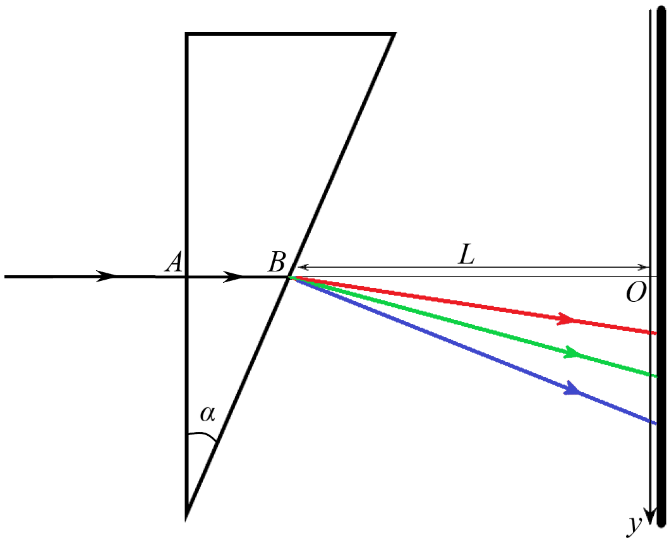
# Определение показателя преломления

Показатель преломления материала – нелинейная величина, зависящая от длины волны падающего излучения. Эта зависимость может быть ключевым свойством материала при изготовлении простейших спектроскопических приборов (к примеру – призм). В то же время зависимость показателя преломления от длины волны бывает губительна в других оптических приборах, в частности там, где важна точная фокусировка лучей. В последнее время появляется всё больше новых материалов и веществ, оптические свойства которых необходимо исследовать. В этой задаче мы попробуем определить зависимость показателя преломления неизвестной жидкости от длины волны, используя жидкость, для которой эта зависимость уже известна.

Схема измерений представлена на рисунке ниже. На воздушную призму с тонкими стенками с углом $\alpha = 30^\circ$ при вершине, погружённую в исследуемую жидкость, падает тонкий луч источника. Луч падает на одну из граней призмы перпендикулярно в точке $A$ и затем выходит из призмы в точке $B$. Из-за зависимости показателя преломления от длины волны углы, под которыми лучи разной длины волны выйдут из призмы, будут различаться. На расстоянии $L$ от точки $B$ находится экран, перпендикулярный $AO$. Для удобства дальнейшей работы введём безразмерную величину $x = \frac{y}{L}$. На экране размещено множество светочувствительных элементов, которые измеряют интенсивность $\mathcal{J}_x(x)$ (мощность, падающую на единицу площади поверхности в единицу времени) в точках, в которых они расположены.




## Часть A. Спектральные свойства источника (3.77 балла)

Обычный источник света (такой как настольная лампа) характеризуется тем, что излучает свет не одной длины волны (как это делает лазер), а длин волн сразу в некотором диапазоне. Чтобы охарактеризовать его излучение, введём понятие спектральной плотности $\mathcal{J}_\lambda(\lambda)$. Мы определяем её так, чтобы мощность, излучаемая источником в диапазоне длин волн от $\lambda$ до $\lambda+\Delta\lambda$, равнялась $\mathcal{J}_\lambda(\lambda)\Delta\lambda$, где $\Delta\lambda$ – малая величина. В этой части задачи мы исследуем спектральную плотность источника.

Выясним сначала, в какую точку $x$ на экране должен попадать луч, проходящий через призму, в зависимости от показателя преломления жидкости. Применив закон Снеллиуса для лучей получим следующую формулу для зависимости $x$ от $n$:

$$x = \operatorname{tg}\alpha \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} + \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha}. \tag{1}$$

Чтобы по известному значению $x$ восстановить значение $n$, формулу (1) необходимо "обратить". В результате несложных вычислений получим:

$$n = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1 - x\operatorname{ctg}\alpha}. \tag{2}$$

Показатель преломления большинства прозрачных материалов в видимом диапазоне можно приближённо описать формулой:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}, \tag{3}$$

где $A$ и $B$ – некоторые постоянные.

Сначала измерения проводят в известной жидкости, для которой эти постоянные равны $A = 1.14$ и $B = 8.6 \cdot 10^4$ нм$^2$. В таблице в листе ответов приведены значения интенсивности $\mathcal{J}_x$ в условных единицах в точках с координатой $x$.

**A1** Для каждого $x$ найдите $n$. **0.41**

**A2** Для каждого $x$ найдите $\lambda$. **0.82**

Чтобы получить формулу для спектральной плотности $\mathcal{J}_\lambda$, необходимо провести более сложные расчёты. Ограничимся здесь лишь итоговой формулой для спектральной плотности:

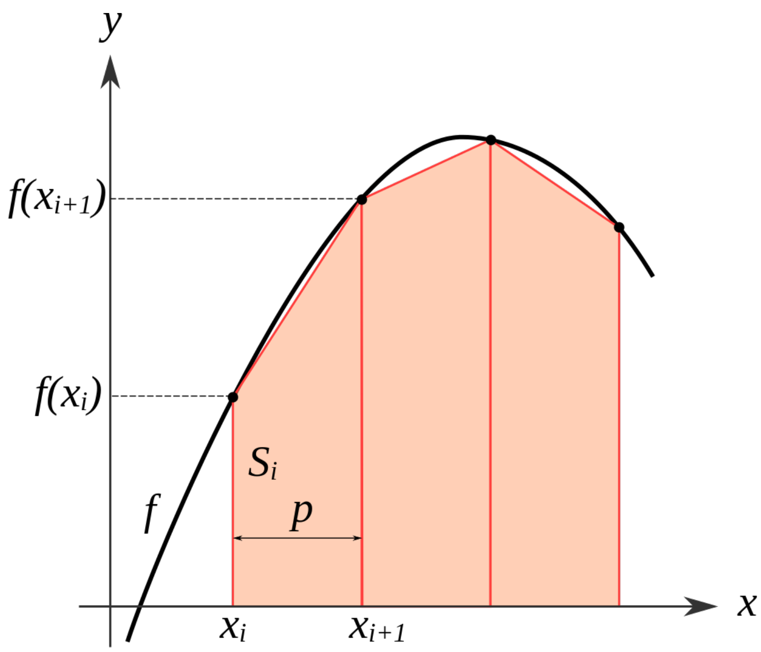
$$\mathcal{J}_\lambda = \frac{2B\sqrt{1+x^2}}{\lambda^3}\frac{(1 - x\operatorname{ctg}\alpha)^2}{x + \operatorname{ctg}\alpha}\mathcal{J}_x. \tag{4}$$

**A3** Для каждого $x$ найдите $\mathcal{J}_\lambda$ (в условных единицах на нм). Поскольку для каждого $x$ мы уже вычислили $\lambda$, мы получили зависимость $\mathcal{J}_\lambda(\lambda)$. **0.82**

**A4** Постройте график $\mathcal{J}_\lambda(\lambda)$. **0.49**

В дальнейшем нам также понадобится посчитать, какая доля мощности источника излучается на длинах волн, меньших некоторого значения $\lambda$. Обозначим эту величину как $\sigma(\lambda)$. Для её нахождения надо посчитать площадь под графиком $\mathcal{J}_x$. Это мы будем делать методом трапеций.

Пусть нам известны значения $f_i$ функции $f(x)$ в точках $x_i$. Тогда площадь под графиком этой функции можно оценить как сумму площадей трапеций, построенных, как показано на рисунке ниже.




Поскольку в нашем случае точки $x_i$ расположены через равные интервалы, формула для итоговой площади $S_k$ под графиком между точками $x_0$ и $x_k$ имеет вид:

$$S_k \approx \left(\frac{f_0 + f_k}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} f_i\right)\Delta x, \tag{5}$$

где $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ – расстояние между соседними точками.

**A6** Найдите для каждого $x$ значение $\sigma$. Поскольку для каждого $x$ мы нашли $\lambda$, мы получили также зависимость $\lambda(\sigma)$. **1.23**

### Часть B. Зависимость показателя преломления от длины волны (6.23 балла)

Теперь жидкость, в которую погружена призма, заменим на неизвестную, зависимость показателя которой от длины волны мы хотим найти. Схема эксперимента остаётся той же. В таблице в листе ответов приведены значения интенсивности $\mathcal{J}_x$ в условных единицах в точках с координатой $x$.

| | | |
|---|---|---|
| **B1** | Для каждого $x$ найдите $n$. | **0.41** |

| | | |
|---|---|---|
| **B2** | Найдите для каждого $x$ значение $\sigma$. | **1.23** |

В прошлой части задачи мы получили зависимость $\sigma(\lambda)$, которая теперь позволит нам восстановить $n(\lambda)$ для неизвестной жидкости. Однако значения $\sigma$, полученные в предыдущей части, не совпадают со значениями, полученными здесь. Чтобы узнать, каким значениям $\lambda$ соответствуют полученные в предыдущем пункте $\sigma$, прибегнем к т.н. линейной интерполяции зависимости $\lambda(\sigma)$.

Суть линейной интерполяции состоит в следующем. Пусть нам известны значения $\lambda_1$ и $\lambda_2$ функции $\lambda(\sigma)$ в точках $\sigma_1$ и $\sigma_2$ соответственно. Если эти точки находятся достаточно близко друг к другу, то с хорошей точностью можно приблизить функцию между этими двумя точками участком прямой. Это позволяет нам приближённо восстановить значения функции для $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$.

Выведем формулу, определяющую $\lambda(\sigma)$. Поскольку функцию мы приближаем линейной, то искомую зависимость можно записать в виде:

$$\lambda = a\sigma + b. \tag{6}$$

Для нахождения $a$ и $b$ заметим, что эта прямая должна проходить через точки $(\sigma_1, \lambda_1)$ и $(\sigma_2, \lambda_2)$. Подставляя их в уравнение (6), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 = a\sigma_1 + b, \\ \lambda_2 = a\sigma_2 + b. \end{cases} \tag{7}$$

Решая эту систему, получим окончательно:

$$\lambda = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\sigma_2 - \sigma_1}\sigma + \frac{\lambda_1\sigma_2 - \lambda_2\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}. \tag{8}$$

| | | |
|---|---|---|
| **B3** | С помощью линейной интерполяции найдите, каким значениям $\lambda$ соответствуют полученные значения $\sigma$. Поскольку $n$ были вычислены в **B1**, мы получаем искомую зависимость $n(\lambda)$. | **4.1** |

| | | |
|---|---|---|
| **B4** | Постройте график $n(\lambda)$ в удобном масштабе (кривая должна занимать большую часть графика по обеим осям, оси не обязательно должны начинаться с нуля). | **0.49** |