2T26-E1. Колебания струны

Оборудование

1. Струна, закреплённая на станине
2. Подвес, соединённый со струной (на установке указана его масса)
3. Набор грузов (на каждом указана масса)
4. Два электромагнитных датчика
5. Генератор переменного тока
6. Осциллограф

Волновое уравнение

Рассмотрим гибкую однородную струну, в которой создано натяжение T, и получим дифференциальное уравнение, описывающее её малые поперечные свободные колебания. Пусть сила натяжения существенно превышает вес струны.

Направим ось x вдоль струны в положении равновесия. Форму струны будем описывать функцией $y(x,t)$, определяющей её вертикальное смещение в точке x в момент времени t (см. рис. 1). Угол наклона касательной к струне в точке x относительно горизонтального направления обозначим как α. В любой момент этот угол совпадает углом наклона касательной к графику функции $y(x)$, то есть $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\partial y}{\partial x}$.

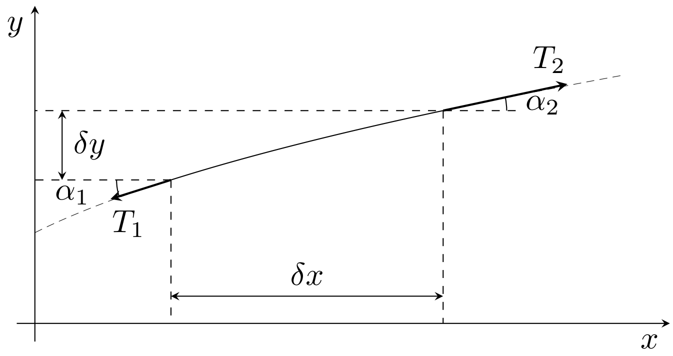

Рис. 1. К выводу уравнения колебаний струны

Рассмотрим элементарный участок струны, находящийся в точке x, имеющий длину δx и массу $\delta m = \rho_l \delta x$, где ρ_l — погонная плотность струны (масса на единицу длины). При отклонении от равновесия на выделенный элемент действуют силы натяжения T_1 и T_2, направленные по касательной к струне. Их вертикальная составляющая будет стремиться вернуть рассматриваемый участок струны к положению равновесия, придавая элементу некоторое вертикальное ускорение $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Заметим, что угол α зависит от координаты x вдоль струны и различен в точках приложения сил T_1 и T_2. Таким образом, второй закон Ньютона для вертикального движения элемента струны запишется в следующем виде:

$$\delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T_1 \sin\alpha_1 + T_2 \sin\alpha_2.$$

Основываясь на предположении, что отклонения струны от положения равновесия малы, можем сделать ряд упрощений:

- Углы наклона α малы, поэтому $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ и, следовательно, можно положить $\alpha = \dfrac{\partial y}{\partial x}$.
- Длина участка струны в изогнутом состоянии практически равна длине участка в положении равновесия (несложно показать, что поправка к длине имеет порядок α^2), поэтому добавочным напряжением вследствие удлинения струны можно пренебречь. Следовательно, силы T_1 и T_2 по модулю равны силе натяжения струны: $T_1 \approx T_2 \approx T$.

Разделим обе части уравнения движения на δx и устремим размер элемента к нулю ($\delta x \to 0$). Тогда уравнение движения примет вид:

$$\rho_l \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_2 \sin\alpha_2 - T_1 \sin\alpha_1}{\delta x} \approx T\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\delta x} \implies T\frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

Подставляя $\alpha = \dfrac{\partial y}{\partial x}$, и вводя обозначение $u = \sqrt{\dfrac{T}{\rho_l}}$, находим окончательно уравнение свободных малых поперечных колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Уравнение выше называют волновым уравнением. Кроме волн на струне, оно может описывать волновые процессы в самых разных системах, в том числе волны в сплошных средах (звук), электромагнитные волны и т.д.

Бегущие волны

Решение волнового уравнения, приведенного выше, представимо в виде суммы двух волн произвольной формы, бегущих в противоположные стороны со скоростями $\pm u$:

$$y(x,t) = y_1(x - ut) + y_2(x + ut),$$

где u – скорость распространения волны, y_1 и y_2 — произвольные функции, вид которых в конкретной задаче определяется из начальных и граничных условий. Особый интерес представляет случай гармонических волн:

$$y(x,t) = a\cos(\omega t - kx) + b\cos(\omega t + kx),$$

что соответствует суперпозиции двух гармонических волн, бегущих навстречу друг другу со скоростью $u = \dfrac{\omega}{k} = \nu\lambda$. Из формулы выше для скорости волны видно, что она зависит только от силы натяжения струны T и ее погонной плотности ρ_l.

Собственные колебания струны. Стоячие волны

Найдем вид свободных колебаний струны с закрепленными концами.

Пусть струна закреплена в точках $x = 0$ и $x = L$. Концы струны не колеблются, поэтому $y(0,t) = 0$ и $y(L,t) = 0$ для любых t. Используя выражение выше, находим $y(0,t) = a\cos\omega t + b\cos\omega t = 0$, откуда следует, что $a = -b$. Тогда после тригонометрических преобразований выражение выше примет вид:

$$y(x,t) = 2a\sin kx \cdot \sin\omega t.$$

Колебания струны, описываемые такой функцией, называются стоячими волнами. Видно, что стоячая волна может быть получена как сумма (интерференция) двух гармонических бегущих волн, имеющих равную амплитуду и движущихся навстречу друг другу.

Как видно из уравнения, точки струны, в которых $\sin kx = 0$, в любой момент времени неподвижны. Такие точки называются узлам. Остальные точки совершают в вертикальной плоскости гармонические колебания с частотой $\nu = \omega/2\pi = u/\lambda$.

Амплитуда колебаний распределена вдоль струны по гармоническому закону: $y_0(x) = 2a\sin kx$. В точках, где $\sin kx = 1$, амплитуда колебаний максимальна – они называются пучностями.

Используя второе граничное условие $y(L,t) = 0$ (точки крепления струны должны быть узлами стоячей волны), найдём условие образования стоячих волн на струне:

$$y(x,t) = 2a\sin kL,$$

откуда

$$\sin kL = 0 \implies kL = \pi n, n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, стоячие волны на струне с закреплёнными концами могут образовываться только если на длине струны укладывается целое число полуволн:

$$L = \frac{\lambda_n}{2} n.$$

Поскольку длина волны однозначно связана с её частотой, струна может колебаться только с определёнными частотами:

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho_l}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Набор (спектр) разрешённых частот ν_n называют собственными частотами колебаний струны. Режим колебаний, соответствующий каждой из частот ν_n, называется собственной (или нормальной) модой колебаний. Произвольное колебание струны может быть представлено в виде суперпозиции её собственных колебаний. Наименьшая частота ν_1 называется также основным тоном (или первой гармоникой), а остальные ($\nu_2 = 2\nu_1$, $\nu_3 = 3\nu_1$) – обертонами (высшими гармониками). На рис. 2 показана картина стоячих волн для $n = 1, 2, 3$. Заметим, что число n определяет число пучностей (не узлов!) колеблющейся струны.

Таким образом, спектр собственных частот струны определён её погонной плотностью ρ_l, силой натяжения T и длиной струны L.

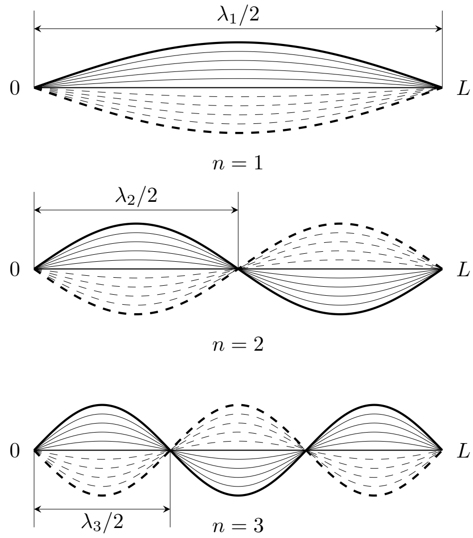

Рис. 2. Первые три гармоники струны

Экспериментальная установка

Схема установки приведена на рис. 3. Стальная гитарная струна 1 закрепляется в горизонтальном положении между двумя стойками с зажимами 2 и 3, расположенными на массивной станине 4. Один конец струны закреплен в зажиме 2 неподвижно. К противоположному концу струны, перекинутому через блок, прикреплена платформа с грузами 5, создающими натяжение струны. Зажим 3 можно передвигать по станине, устанавливая требуемую длину струны. Возбуждение и регистрация колебаний струны осуществляются с помощью электромагнитных датчиков (вибраторов), расположенных на станине под струной. Электромагнитный датчик 6 подключен к звуковому генератору 7 и служит для возбуждения колебаний струны, частота которых измеряется с помощью частотомера 10 (в некоторых установках частотомер встроен в генератор). Колебания струны регистрируются с помощью электромагнитного датчика 8, сигнал с которого передается на вход осциллографа 9. Разъёмы, через которые датчики с помощью кабелей соединяются с генератором и осциллографом, расположены на корпусе станины.

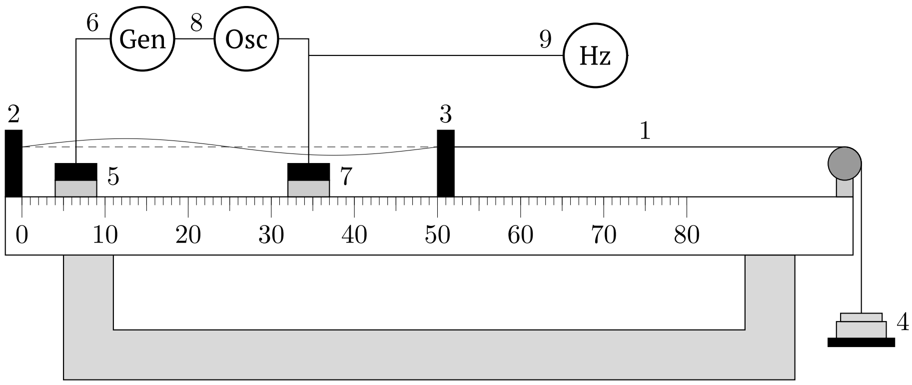

Рис. 3. Экспериментальная установка

Участок струны, расположенный над электромагнитом, совершает колебательное движение в вертикальной плоскости с частотой задающего генератора. Колебания далее передаются по всей струне и, если частота колебаний совпадает с одной из собственных частот струны, на струне устанавливается стоячая волна. Колеблющаяся струна возбуждает в регистрирующей катушке переменную ЭДС с амплитудой, пропорциональной амплитуде колебаний струны. Сигнал ЭДС измеряется с помощью осциллографа.

Магнитное поле наиболее однородно по координате в центральной части электромагнита, поэтому датчики должны быть повернуты так, чтобы струна располагалась в центральной части перпендикулярно к полюсам магнита. Возбуждающий датчик следует расположить вблизи неподвижного конца струны (ближе к узлу), а регистрирующий – в пучности.

A1	Для силы натяжения, соответствующей полной массе груза, крепежа и платформы в $m = 1$ кг, для диаметра струны $d \approx 0.3$ мм, длины струны $L = 50$ см, и зная табличное значение плотности стали 7.8 г/см^3, рассчитайте частоту основной гармоники ν_1^{th} и запишите это значение в лист ответов.	**0.5**

A2	Установите на платформу груз такой массы, чтобы полная масса груза, крепежа и платформы составила 1 кг, а длина зажатой части струны была равна $L = 50$ см. Возбуждающий датчик установите вблизи узла стоячей волны. Подайте синусоидальный сигнал на возбуждающий датчик. Добейтесь возбуждения стоячей волны на частоте вблизи найденной в пункте **A1**. Запишите полученное значение частоты ν_1. **Позовите преподавателя и продемонстрируйте, что резонанс струны соответствует найденной частоте!**	**1.0**

A3	Экспериментально определите значения частот ν_n стоячих волн, которые удается наблюдать на высоких гармониках. Достаточно исследовать 5 высоких гармоник $(2 \leq n \leq 6)$.	**0.5**

A4	Проведите дополнительные измерения пунктов **A2**-**A3** для 6 других различных значений силы натяжения струны. Максимальная нагрузка не должна превышать 3.5 кг. При каждом значении натяжения струны достаточно исследовать 6 гармоник $(1 \leq n \leq 6)$.	**3.5**

A5	Постройте на одном графике графики зависимости частоты ν_n от номера гармоники n при различных натяжениях T.	**0.7**

A6	Определите скорости волн u, распространяющихся по струне. Оцените погрешности u.	**0.7**

A7	Постройте график зависимости квадрата скорости u^2 от силы натяжения T. Определите погонную плотность струны ρ_l и оцените погрешность результата. Сравните полученное значение ρ_l со значением, указанным на установке.	**1.1**

A8	Сняв амплитудно-частотную характеристику для струны в состоянии из пункта **A2** вблизи частоты основной гармоники, оцените добротность Q струны как колебательной системы.	**2.0**