

Road to IPhO

Топологический изолятор

В данной задаче оценка погрешности не требуется!

Введение

В конце XX века для описания свойств электропроводности полиацетилена была предложена модель Су-Шиффера-Хигера (SSH-цепочка), которая положила начало топологической физике. На концах топологически нетривиальных систем возникают топологически защищенные краевые состояния.

В этой задаче мы рассмотрим LC-контур — простейшую систему, моделирующую молекулу полиацетилена и обладающую топологическими свойствами.

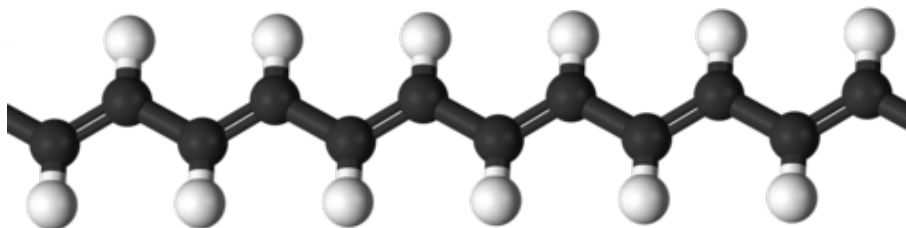
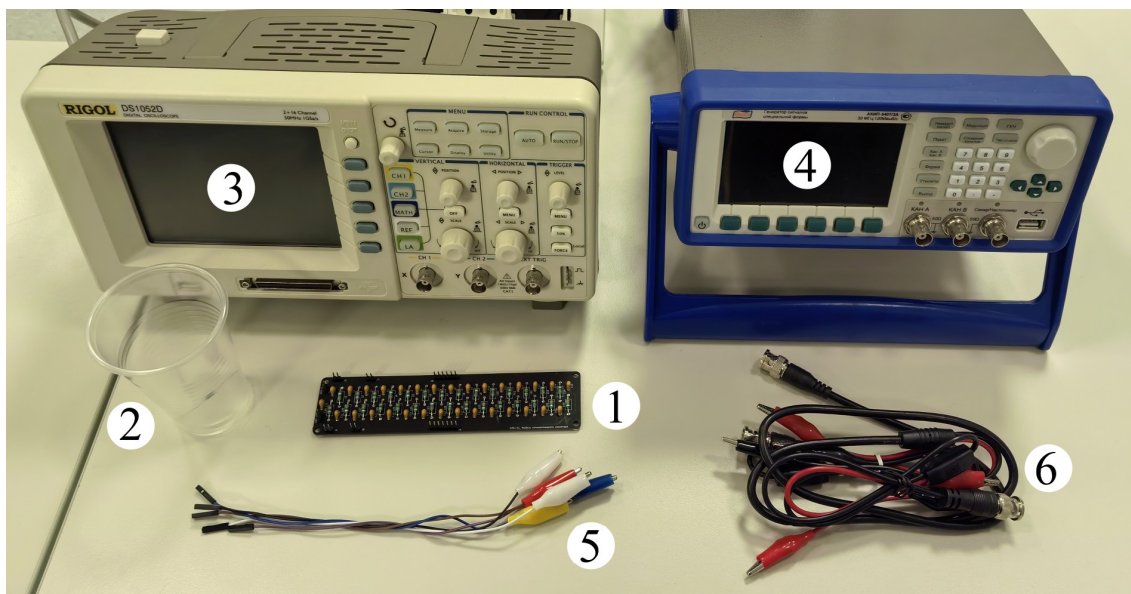


Рис. 1. Молекула полиацетилена

Оборудование



1. Плата с LC-контуром, состоящим из конденсаторов неизвестной емкости C_1 и C_2 ($C_1 < C_2$) и катушек индуктивности $L = 18$ мкГн
2. Резистор $R = 200$ Ом
3. Осциллограф
4. Генератор (подавать напряжение амплитудой не более 2 В)
5. Провода мама-банан (5 шт.)
6. Провода BNC-крокодил (3 шт.)

Road to IPhO

Примечание. Вынимайте провод мама-банан из платы строго вертикально, чтобы не повредить контакты!

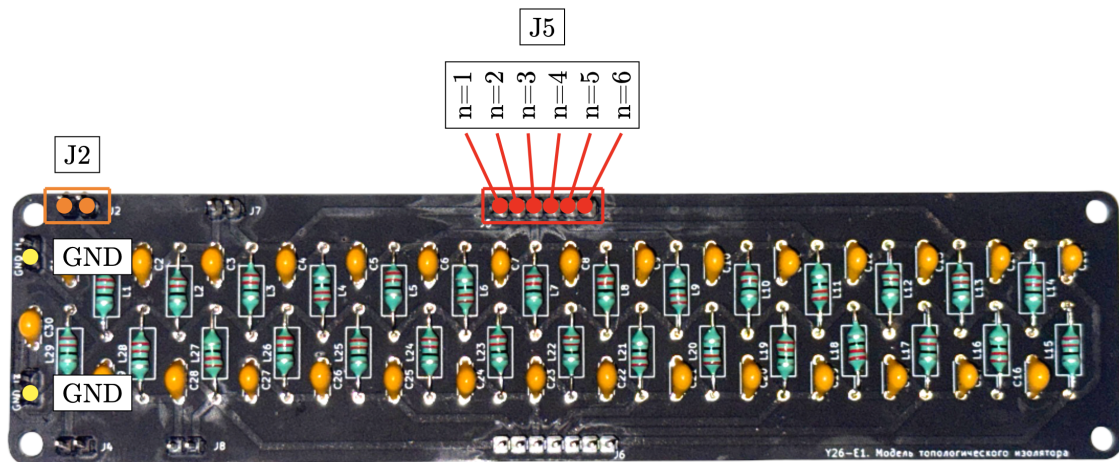


Рис. 2. Плата с LC-контуром

Для измерений на плате доступны контакты **J5**, **J2** и **GND** (см. рис. 1):

- каждый из контактов **J5** отвечают за подключение к звену цепи с номером n ;
- **J2** отвечает за подключение ко входу цепи;
- к **GND** нужно подключать заземление генератора и осциллографа.

Часть А. Дисперсионное соотношение цепи (5 баллов)

Рассмотрим цепочку, состоящую из конденсаторов C_1 и C_2 ($C_1 < C_2$) и катушек индуктивности L . К самому левому звену цепи подключен генератор, который возбуждает в цепи волны напряжения. Будем считать, что отраженной волны нет, бегущая волна распространяется слева направо.

Цепь изображена на рис. 3. Одно звено обозначено красным прямоугольником. Обозначим потенциал узла A на входе в звено V , а узла B обозначим u . Нижняя ветвь цепочки заземлена.

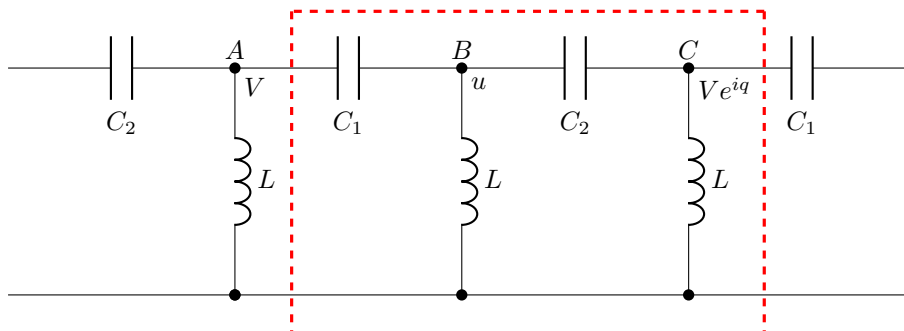


Рис. 3. LC-цепь

Представим волну напряжения в комплексном виде

$$V(n, t) = V e^{-i\omega t + iqn},$$

$$u(n, t) = u e^{-i\omega t + iqn},$$

где n — номер звена цепочки, ω — круговая частота сигнала, q — волновой вектор. Дисперсионным соотношением называется зависимость $q(\omega)$.

Road to IPhO

A1 Используя правила Кирхгофа, получите систему уравнений, связывающую V , u и q . Ответ выразите через V , u , q , L , C_1 , C_2 и ω . **0.4**

Обратите внимание, что полученные уравнения выполняются как для конечной, так и для бесконечной цепи.

A2 Из полученной системы выразите $\cos q$ через ω , L , C_1 и C_2 . **0.8**

В зависимости от значения аргумента действительная и мнимая часть арккосинуса действительного числа выражается следующим образом

$$\operatorname{Re}(\arccos x) = \begin{cases} \arccos x, & |x| \leq 1, \\ 0, & x > 1, \\ \pi, & x < -1, \end{cases} \quad \operatorname{Im}(\arccos x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq 1, \\ \operatorname{arcosh} x, & x > 1, \\ \operatorname{arcosh} x, & x < -1. \end{cases}$$

A3 Определите, при каких частотах у волнового вектора q будет мнимая часть. Ответ выразите через L , C_1 и C_2 . **0.6**

Если вам не удалось выполнить пункт A2, в дальнейшем считайте, что зависимость $\cos q$ от ω имеет вид

$$\cos q = 1 - \frac{A}{\omega^2} + \frac{B}{\omega^4}.$$

Положительная мнимая часть волнового вектора отвечает за экспоненциальное затухание амплитуды напряжения от звена к звену, а действительная — за сдвиг фаз амплитуд напряжений звеньев:

$$V_{n+1} = V_n e^{-\operatorname{Im}(q)} e^{i \operatorname{Re}(q)}.$$

Подключите генератор к **J2**, соединив его землю с контактом **GND**. С помощью контактов, обозначенных **J5**, измеряйте напряжение на соответствующих звеньях цепи для определения волнового вектора q .

A4 Измерьте зависимость действительной и мнимой составляющей волнового вектора $\operatorname{Re}(q)$ и $\operatorname{Im}(q)$ от частоты f . Опишите методику измерений. Измерения проводите в диапазоне частот от 650 кГц до 1300 кГц с шагом 50 кГц. Для каждой частоты f необходимо получить значение и $\operatorname{Re}(q)$, и $\operatorname{Im}(q)$. **1.5**

Полученные зависимости позволяют получить дисперсионное соотношение для данной цепи. Используя мнимую $\operatorname{Im}(q)$ и действительную $\operatorname{Re}(q)$ части q можно определить $\cos q$, который будет являться комплексным числом, определяемым параметрами системы и циклической частотой ω .

$$\cos q = \cos \operatorname{Re}(q) \cosh \operatorname{Im}(q) - i \sin \operatorname{Re}(q) \sinh \operatorname{Im}(q).$$

Поскольку почти на всем диапазоне измерений либо мнимая, либо действительная часть q равны нулю, мнимой частью $\cos q$ далее будем пренебрегать.

A5 Линеаризуйте зависимость $\operatorname{Re}(\cos q)$ от частоты генератора f и определите коэффициенты линейной зависимости. **1.0**

A6 Используя коэффициенты, найденные в A5, определите ёмкости конденсаторов C_1 и C_2 ($C_1 < C_2$). **0.7**

Road to IPhO

Часть В. Исследование зоны проводимости (5 баллов)

В части А задачи мы не учитывали отражённую волну, которая тоже может распространяться в цепи. Однако при больших частотах волна, бегущая от генератора, практически не затухает, поэтому пренебрегать отражённой волной нельзя.

Рассмотрим цепь, которая слева подключена к генератору и имеет N звеньев (см. рис. 5). Обозначим волну, бегущую вправо, индексом r (именно она исследовалась в части А), влево — индексом l , тогда напряжения в этих волнах зависит от номера звена n и времени t , как

$$V_r(n, t) = V_{0r} e^{-i\omega t + iqn},$$

$$V_l(n, t) = V_{0l} e^{-i\omega t - iqn},$$

Таким образом, все уравнения, записанные для бегущей вправо волны, аналогичны уравнениям для бегущей влево волны с заменой $q \rightarrow -q$. Токи в каждой из волн (см. рис. 4) связаны с напряжением через импеданс

$$z_r = \frac{V_r(n, t)}{I_r(n, t)}, \quad z_l = \frac{V_l(n, t)}{I_l(n, t)}.$$

Полным импедансом цепи называется величина

$$z = \frac{V(0, t)}{I(0, t)}.$$

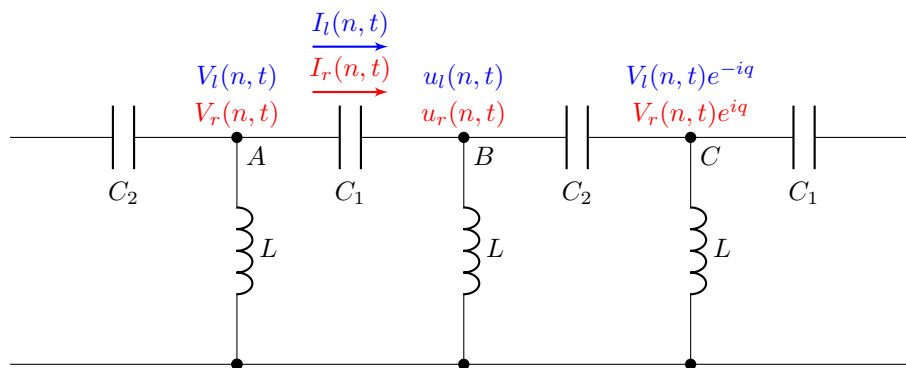


Рис. 4. Волны в LC-цепи

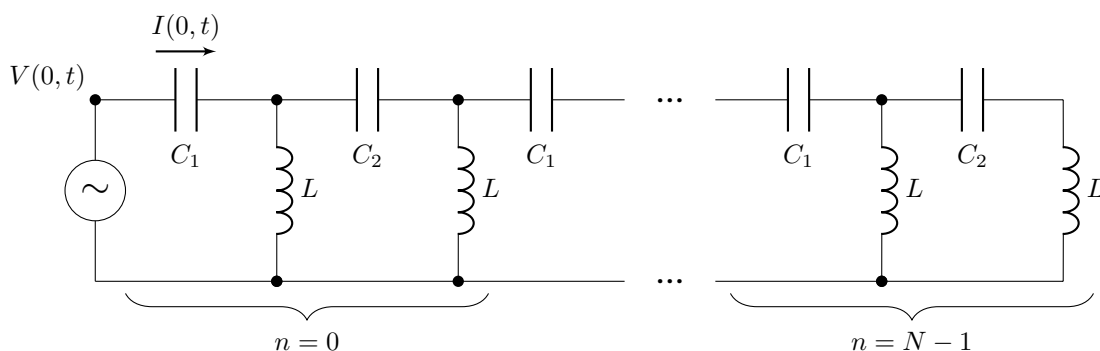


Рис. 5. Конечная LC-цепь

Road to IPhO

B1 Выразите импедансы z_r и z_l для волн, бегущих вправо и влево. Ответ выразите через C_1 , C_2 , L , q и ω . **0.8**

B2 Запишите граничное условие, связывающие комплексные амплитуды напряжений $V_r(0, t)$ и $V_l(0, t)$. В ответе получите уравнение, содержащее $V_r(0, t)$, $V_l(0, t)$, z_r , z_l , q и N . **0.6**

Далее считайте, что $\omega \gg \frac{1}{\sqrt{LC_1}}, \frac{1}{\sqrt{LC_2}}$.

B3 Получите выражение для модуля полного импеданса цепи $|z|$, состоящей из N звеньев. Ответ выразите через N , q и $|z_r|$. **1.2**

B4 Используя результаты, полученные в части А, напишите уравнение на частоты, при которых достигается максимум модуля импеданса. Ответ выразите через N , C_1 , C_2 , L , ω и целочисленный параметр m . **0.6**

К контакту **GND** подключите землю генератора, «плюс» генератора соедините через резистор с контактом **J2**. На плате вы получите цепь, состоящую из N звеньев, изображенную на рис. 4. Измеряя напряжение на резисторе, вы можете получить силу тока в цепи, измеряя напряжение на контактах **J2-GND** – напряжение в цепи. Таким образом, можно определить импеданс цепи.

Примечание. Вы можете обратить внимание, что в реальной цепи есть ещё одна катушка, подключенная параллельно звеньям. Однако её существование не влияет на положение максимумов модуля импеданса, поэтому при решении задачи её можно не учитывать.

B5 Измерьте частоты, при которых реализуется максимум модуля импеданса. Измерения следует проводить на частотах $1400 \text{ кГц} < f < 6000 \text{ кГц}$, при которых LC-контур переходит в зону проводимости. **1.0**

B6 Линеаризуйте зависимость, измеренную в пункте B5, и постройте линеаризованный график, из которого определите количество звеньев в цепи N . **0.8**