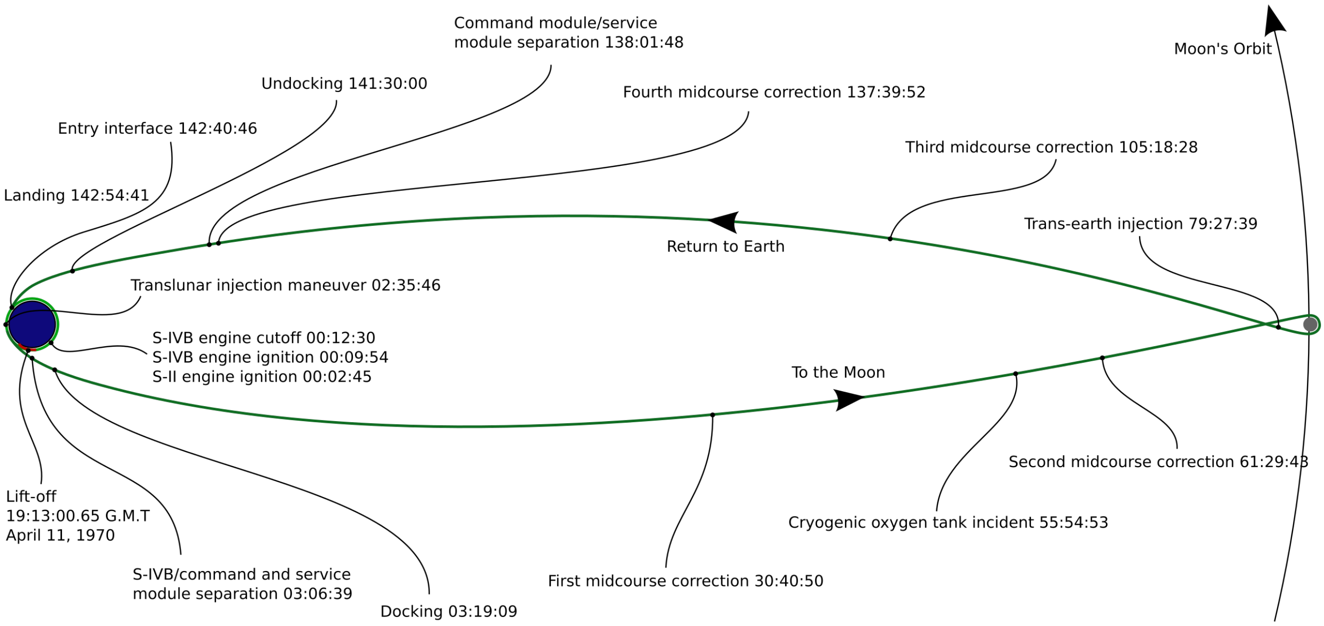
Полет на Луну

В данной задаче будут рассматриваться орбиты, по которым можно долететь до Луны и вернуться назад.

В простейших задачах, как правило, рассматривается полет на Луну по эллиптической орбите с большой осью, равной r_m, где r_m — расстояние от Земли до Луны.

К сожалению, по ряду причин такая орбита не является самой оптимальной и безопасной. Основным недостатком эллиптической орбиты является захват корабля в поле тяжести Луны. В процессе этого захвата кораблю необходимо выйти на эллиптическую орбиту вокруг Луны с помощью маневровых двигателей, и отказ двигателей в такой ситуации может привести к падению на поверхность Луны.

Эту проблему безопасности решает траектория (орбита) свободного возврата (free-return trajectory). Луна выступает в роли гравитационной рогатки и траектория представляется из себя своего рода восьмерку. Такая орбита использовалась, например, при отправке на Луну советского аппарата Луна-3, а также поговаривают, что именно по ней возвращалась печально известная миссия Аполлон-13 (которая якобы летала к спутнику нашей прекрасной планеты) после аварии при подлете к Луне.



«Хронология» миссии Аполлон-13

В ходе всей задачи могут понадобиться следующие физические постоянные:

- гравитационная постоянная $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}$
- масса Земли $M_e = 6 \cdot 10^{24}$ кг
- масса Луны $M_m = \dfrac{M_e}{81}$
- радиус Земли $R_e = 6400$ км
- радиус Луны $R_m = 1700$ км
- расстояние между Землей и Луной $r_m = 3.85 \cdot 10^8$ м
- период обращения Луны вокруг Земли $T_m = 27.4$ суток
- орбитальная скорость Луны $v_m = \dfrac{2\pi r_m}{T_m}$

Часть A. Взлет с Земли (3.0 балла)

Для начала рассмотрим процесс взлета с Земли. Довольно известным фактом является, что большую часть массы ракеты составляет топливо первой ступени необходимая для развития первой космической скорости и преодоления земной атмосферы. Точные расчеты таких взлетов **предельно** сложны. Именно сложность и необходимость учитывать бесконечное множество факторов объясняет немалый процент неудачных стартов ракет. Тем не менее некоторые оценочные значения можно получить из довольно простых соображений.

Рассмотрим вертикальный взлет ракеты с Земли вдоль оси y (ось y направлена вертикально вверх, начальные координата и скорость ракеты равны 0). Начальная масса ракеты равна m_0. На ракету действует сила тяжести и сила сопротивления $\vec{F} = -kv\vec{v}$. Ракета выбрасывает из двигателя продукты сгорания с постоянным массовым расходом μ и скоростью u относительно ракеты. Считайте, что g мало изменяется с высотой.

Численнные значения:

- $g = 9.8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
- $\mu = 2700\ \frac{\text{кг}}{\text{с}}$
- $u = 4.5\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$
- $k = 0.25\ \frac{\text{кг}}{\text{м}}$ - значение коэффициента силы сопротивление вблизи поверхности Земли
- $a = 6600\ \text{км}$
- $m_0 = 500\ \text{т}$

A1	Запишите выражения для $\ddot{y}$ через $\dot{y}$, k, m_0, μ , u, g и t.	**0.5**

На начальном этапе взлёта скорость ракеты мала, поэтому трением можно пренебречь. Найдём в каких пределах работает эта модель при вертикальном взлёте.

A2	Пренебрегая силой сопротивления, найдите скорость ракеты $v(m)$ и координату $y(m)$ в момент, когда её масса равна m. Выразите ответ через m, g, u, μ и m_0.	**1.0**

A3	Используя результат прошлого пункта и считая, что k слабо зависит от высоты, найдите численно, на какой высоте H_c будет находиться ракета в момент, когда сила сопротивления станет равна силе тяжести.	**0.8**

Высота плотных слоёв атмосферы порядка 10 км, поэтому на больших высотах сила сопротивления становится пренебрежимо мало. В силу этого факта не будем учитывать его и в следующем вопросе.

A4	Рассматривая вертикальный взлёт, численно оцените отношение β_1 начальной к конечной массе ракеты, при котором ракета развивает скорость v_a (скорость движения по круговой орбите радиуса a).	**0.7**

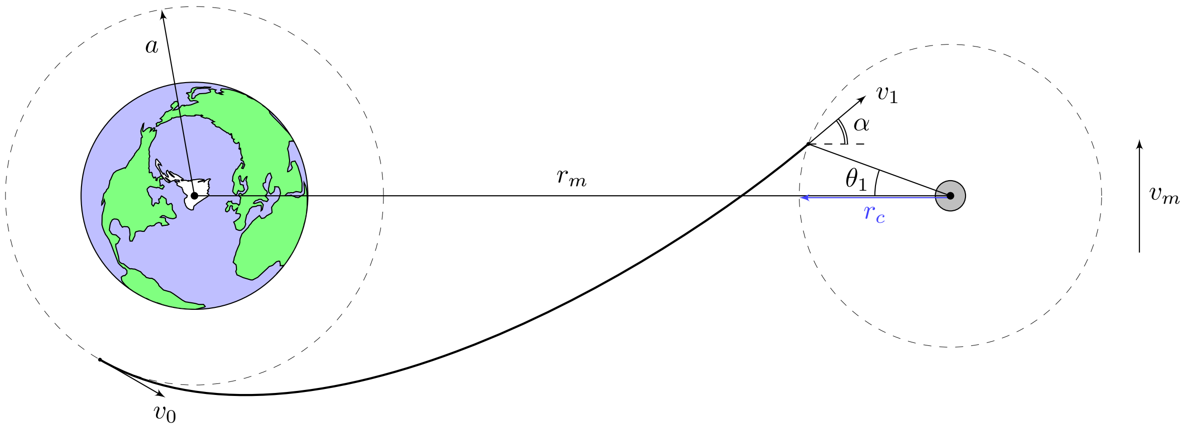
В реальности ракета выводится на орбиту по сложной траектории, поэтому полученное значение не совпадает в точности с действительным значением. В дальнейшем считайте, что реальное значение $\beta_1 = 15$.

Часть B. Траектория свободного возврата (6.0 балла)

Перейдем непосредственно к задаче о рассмотрении орбиты свободного возврата.

Для начала найдем область в которой гравитационное притяжение Луны влияет больше чем притяжение Земли.

B1	Рассмотрим точку на прямой Земля — Луна между Землёй и Луной, в которой силы притяжения Земли и Луны равны по модулю. Найдите расстояние r_c от Луны до данной точки. Ответ выразите через r_m, M_e и M_m.	**0.3**



В дальнейшем ВО ВСЕХ ПУНКТАХ ЗАДАЧИ будем называть сферу радиуса r_c вокруг Луны зоной притяжения Луны и считать, что в ней изменение потенциальной энергии тела $\Delta U = \Delta U_m$ (т.е. взаимодействием с Землей можно пренебречь), а во всем остальном пространстве $\Delta U = \Delta U_e$ (т.е. взаимодействием с Луной можно пренебречь).

Также во всех пунктах считайте, что СО Луны — поступательно движущаяся.

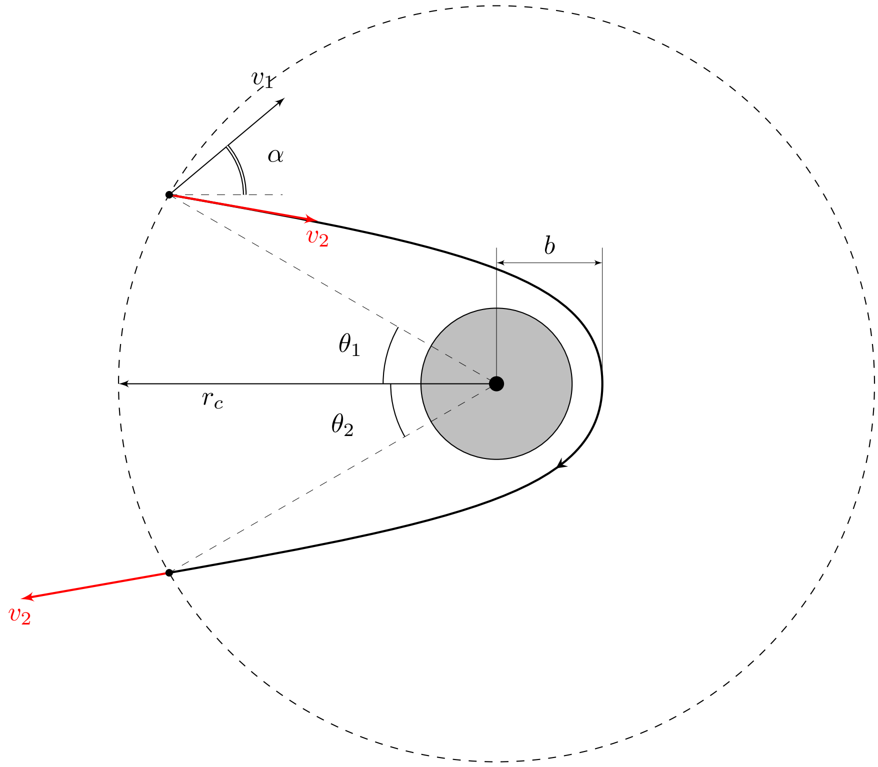
Пусть корабль изначально находится на круговой околоземной орбите радиуса a. В нужный момент времени он включает двигатели и разгоняется до скорости v_0 ($\vec{v}_0$ направлена по касательной к изначальной круговой орбите), такой, что может достигнуть зоны притяжения Луны. Минимальное расстояние между центром Луны и кораблем в процессе движения — b. Прямо перед входом в зону притяжения Луны скорость корабля в СО Земли равна v_1.

Введем обозначения для 2-ых космических скоростей для соответствующих орбит:

$$v_{\text{II}}^e = \sqrt{\frac{2GM_e}{a}}$$

$$v_{\text{II}}^m = \sqrt{\frac{2GM_m}{b}}$$

Пусть θ_1 и θ_2 углы показанные на рисунке. В общем виде орбита свободного возврата не обязана быть симметричной, и траектория возврата может отличаться от траектории полета к Луне. Для простоты расчетов будем рассматривать орбиту симметричную относительно прямой Земля — Луна. Тогда угол $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. Обозначим α угол между скоростью v_1 и прямой Земля — Луна.



Далее, для определения необходимой скорости v_1, будем рассматривать орбиту корабля в СО Луны в ее зоне притяжения. Для удобства введем обозначения $s = \sin(\alpha + \theta)$, $s' = \sin\alpha$, $c = \cos\theta$.

B2 Рассматривая корабль в СО Луны, запишите выражение для удельного момента импульса L_0^m относительно центра Луны и скорости v_2 в момент, когда расстояние до Луны равно r_c. Ответ выразите через s, s', c, v_1, v_m и r_c. **0.5**

B3 Записывая ЗСЭ в СО Луны для ближайшего к Луне положения корабля и положения сразу после входа в зону притяжения, получите и решите квадратное уравнение и получите точное выражение для v_1/v_m. Ответ выразите через s, s', c, b/r_c и v_{II}^m/v_m. **1.2**
Примечание. Выбирать знак корня в этом пункте не нужно. Не забудьте, что в рамках используемой модели, взаимодействие с Землёй в этой области учитывать не нужно.

Перейдем к анализу полученного выражения для v_1. Далее используются следующие соотношения между величинами:

- $b/r_c \ll 1$
- $a/r_m \ll 1$
- $r_c/r_m \ll 1$

B4 Покажите что выражение для v_1, полученное в пункте **B4**, при разложении до первого порядка по степеням b/r_c приводится к виду: **1.0**

$$v_1 \approx \frac{v_m c}{s} + B_0 \cdot \frac{b}{r_c}$$

Выразите B_0 через v_m, v_{II}^m, s, c и s'. Выбирая знак корня, покажите, что $B_0 > 0$.

Далее во всех пунктах задачи считайте, что дополнительно выполнено $\alpha \ll 1$.

B5 Покажите, что выражение для v_1 с точностью до **первого** порядка имеет вид: **0.6**

$$v_1 \approx \frac{v_m}{\operatorname{tg}\theta} + A\alpha + B\frac{b}{r_c}$$

Выразите A и B через v_m, v_{II}^m, θ.

B6 **Вернёмся в систему отсчёта Земли**, чтобы найти выражение для угла α между скоростью v_1 и прямой Земля — Луна. **0.6**
Найдите выражение для α между скоростью v_1 и прямой Земля — Луна с точностью до первого порядка по степеням r_c/r_m и a/r_m. Ответ выразите через a, r_c, r_m, v_1, v_0 и θ.
Примечание. Не забудьте, что в рамках используемой модели, взаимодействие с Луной в этой области учитывать не нужно.

B7 Записывая ЗСЭ в СО Земли и, пренебрегая слагаемыми порядка a/r_m и r_c/r_m, выразите скорость v_0 через v_1 и v_{II}^e. **0.4**
Примечание. Не забудьте, что в рамках используемой модели, взаимодействие с Луной в этой области учитывать не нужно.

Вновь вернёмся в СО Луны. До сих пор мы нигде не использовали условие симметричности орбиты. Воспользуемся этим условием и построим гиперболу симметричную относительно прямой Земля-Луна и проходящую через заданные точки: точки входа и выхода в и из зоны притяжения Луны и перицентр орбиты.

B8 Записывая уравнение конического сечения, получите уравнение, из которого можно найти θ, через v_1, α, v_m, G, M_m, b и r_c. **1.0**

Полученная система уравнений на v_1, α и θ может быть приближенно решена численно, но в этой задаче не будем этим заниматься. Получаемая скорость v_1 будет на порядок меньше v_{II}^e. Тогда $v_0 = v_{\text{II}}^e$.

B9 Найдите β_2 — отношение начальной массы ракеты к конечной при разгоне от скорости v_a — орбитальной скорости при движении по круговой орбите радиуса a до скорости v_0. Ответ выразите через u, v_{II}^e и v_a. Рассчитайте численное значение β_2, необходимые для расчётов величины возьмите из части **A**. **0.4**

Часть C. Прилунение (1.0 балла)

В данной части рассмотрим прилунение. Будем рассматривать случай близкого подлёта в Луне, для численных расчётов считайте $b = 1800$ км. Учитывая, что $h = b - R_m \ll R_m$, с хорошей точностью можно считать, что топливо тратится только на торможение до нулевой скорости в ближайшей к Луне точке.

C1 Считая $v_2 = 1.5\,\text{км/с}$ (остальные необходимые величины возьмите из прошлых частей задачи), рассчитайте численно, во сколько раз уменьшится масса ракеты в процессе прилунения β_3. **0.5**

C2 Рассчитайте численно какую начальную массу m должна иметь ракета для доставки на Луну груза весом 40 т. **0.5**