

Road to IPhO

Эффект Фарадея в электронном газе

Вращение плоскости поляризации излучения, проходящего через помещенное в магнитное поле вещество, называется эффектом Фарадея. Этот эффект можно использовать для измерения магнитных полей, а также в различных оптических устройствах, работающих с поляризованным светом.

Можно добиться заметного угла поворота поляризации даже в очень тонком образце. Для этого нужно обеспечить достаточную поверхностную плотность электронов с большой длиной свободного пробега. Это можно реализовать, например, в электронном газе, возникающем на границе разных полупроводников. Еще одной системой, в которой наблюдается эффект Фарадея, является графен – двумерная структура из атомов углерода, толщина которой составляет всего один атом.

В этой вы можете использовать следующие значения фундаментальных постоянных:

1. $q = 1.602 \cdot 10^{-16}$ Кл – модуль заряда электрона;
2. $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная;
3. $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}$ Дж – постоянная Планка;
4. $c = 2.998 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

Во всей задаче используется правая система координат xyz .

Часть А. Проводимость электронного газа (2.5 балла)

В этой части изучим проводимость электронного газа с объемной концентрацией электронов n . Для описания электронов будем использовать модель Друде, в которой электроны – свободные нерелятивистские частицы массы m с зарядом $-q$. При движении внутри вещества они иногда рассеиваются на дефектах кристаллической решетки и друг на друге. Эффект соударений можно описать, введя эффективную вязкую силу $\vec{F} = -m\vec{v}/\tau$, τ – характерное время между соударениями.

Пусть на систему действует однородное электрическое поле, меняющееся с циклической частотой ω . В комплексной записи оно имеет вид

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}.$$

Тогда среднюю скорость электронов можно записать в виде $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{-i\omega t}$, а плотность тока $\vec{j} = \vec{j}_0 e^{-i\omega t}$. Плотность тока связана с электрическим полем комплексной зависящей от частоты проводимостью

$$\vec{j} = \sigma(\omega) \vec{E}.$$

A1 Покажите, что зависимость проводимости от частоты в рассматриваемой модели имеет вид

0.3

$$\sigma = \frac{D}{-i\omega + \frac{1}{\tau}}.$$

Выразите коэффициент D через n , q , m .

Введенный выше параметр D называется коэффициентом Друде (Drude weight).

A2 Пусть теперь система помещена в магнитное поле B , направленное вдоль оси z . Комплексная амплитуда электрического поля \vec{E}_0 лежит в плоскости xy , ее проекции E_{0x} , E_{0y} . Запишите уравнения для определения компонент установившейся скорости движения электронов v_{0x} , v_{0y} .

0.5

Road to IPhO

В более общем случае составляющая тока вдоль некоторой оси может зависеть от обеих компонент поля, такую зависимость можно представить в виде

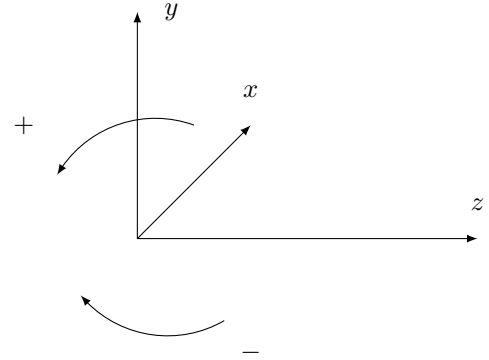
$$\begin{aligned}j_x &= \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y; \\j_y &= \sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y.\end{aligned}\tag{1}$$

A3 Покажите, что проводимости в магнитном поле удовлетворяют соотношениям $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$, $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$. **1.2**
Выразите σ_{xx} и σ_{xy} через D , τ и частоту движения электронов в магнитном поле $\omega_B = qB/m$.

Часть В. Эффект Фарадея (4.5 балла)

Из соотношений части **A3** следует, что в магнитном поле в общем случае вектор плотности тока не сонаправлен с электрическим полем. В этой части будем изучать среду, проводимость которой описывается формулами (1), причем выполняются соотношения $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$, $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$.

Оказывается, что если электрическое поле создается с волной с круговой поляризацией, то есть электрическое поле вращается в плоскости xy , то выполняются соотношения $\vec{j} = \sigma_{\pm}\vec{E}$. Здесь знак $+$ относится к правой круговой поляризации (поле вращается против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси z), а знак $-$ к отрицательной (вращение в обратную сторону).



B1 Найдите отношение комплексных амплитуд полей E_{0y}/E_{0x} для правой и левой круговой поляризации. **0.3**

B2 Покажите, что для круговых поляризаций выполняются соотношения $\vec{j} = \sigma_{\pm}\vec{E}$ и найдите соответствующие значения проводимости σ_{\pm} . Выразите ответ через проводимости σ_{xx} и σ_{xy} . **0.5**

В проводящих средах в переменном поле ток приводит к смещению зарядов и возникновению поляризации, причем вектор поляризации связан с плотностью тока соотношением $\vec{j} = \partial\vec{P}/\partial t$.

B3 Для среды с соотношением $\vec{j} = \sigma(\omega)\vec{E}$ определите диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega)$ и отвечающей ей показатель преломления n , выразите ответ через σ , ω и фундаментальные постоянные. **0.4**

Если проводимость $\sigma_{xy} \neq 0$, такое же соотношение справедливо и для волн с круговой поляризацией, однако значения диэлектрических проницаемостей и показателей преломления для волн с разными круговыми поляризациями отличаются.

B4 Считая, что показатели преломления близки к 1, найдите разность показателей преломления для волн с правой и левой поляризацией $\Delta n = n_+ - n_-$. Выразите ответ через σ_{xx} , σ_{xy} и фундаментальные постоянные. **0.5**

B5 Пусть на слой среды толщины h падает плоская монохроматическая волна с линейной поляризацией. Границы среды перпендикулярны оси z , волна распространяется вдоль оси z . Покажите, что после прохождения среды направление поляризации поворачивается на угол θ_F . Выразите этот угол через h , σ_{xy} и фундаментальные постоянные. **0.8**

Road to IPhO

Явление поворота плоскости поляризации в магнитном поле называется эффектом Фарадея. В полученном ответе для θ_F в общем случае содержится мнимая часть, отвечающая различному затуханию волн с разными поляризациями. Далее везде, кроме В7, этим эффектом будем пренебрегать, а для описания эффекта использовать вещественную часть найденного ранее выражения.

В6 Используя результат пункта А3, получите вещественное выражение для угла поворота плоскости поляризации θ_F . Оставьте от полученного выше выражения вещественную часть. Ответ выразите через $D, h, \tau, \omega_B, \omega$ и фундаментальные постоянные. **0.5**

В7 В общем случае показатели преломления для обеих круговых поляризаций будут содержать различные мнимые части, что приведет в общем случае к эллиптической поляризации. Пусть параметры системы таковы, что $kn_+h = 0.73 + 0.18i, kn_-h = 1.17 + 0.35i$, где отброшены несущественные слагаемые, кратные 2π . Здесь k – волновое число в вакууме. Поляризация падающей волны направлена вдоль оси x . Найдите отношение полуосей a/b и угол ψ между большой полуосью и осью x для эллипса конечной поляризации. **1.5**

Часть С. Эффект Фарадея в графене (2.5 балла)

Графен – двумерный материал, представляющий собой один слой атомов углерода. В результате рассмотрения квантовомеханической модели взаимодействия электронов с кристаллической решеткой графена оказывается, что их можно описать как частицы, движущиеся с постоянной скоростью v_F . Эта скорость $v_F \ll c$ называется скоростью Ферми. Энергия электрона в графене связана с его импульсом соотношением $\varepsilon = v_F p$, аналогичное соотношению для ультрарелятивистской частицы. Для силы Лоренца применимо стандартное соотношение. Электрические свойства графена определяются электронами с энергией, близкой к определенному значению ε_F (так называемая энергия Ферми).

Теоретические исследования поведения электронов в кристалле углерода (графите) проводились еще с середины XX века, например в статье Ф. Уоллеса. Однако популярным для изучения графен стал благодаря экспериментам **Константина Новосёлова** и **Андрея Гейма**, получившим за них Нобелевскую премию.

С1 Найдите частоту ω_B движения электрона с энергией ε_F в магнитном поле. Выразите ответ через v_F, q, B, ε_F . **0.5**

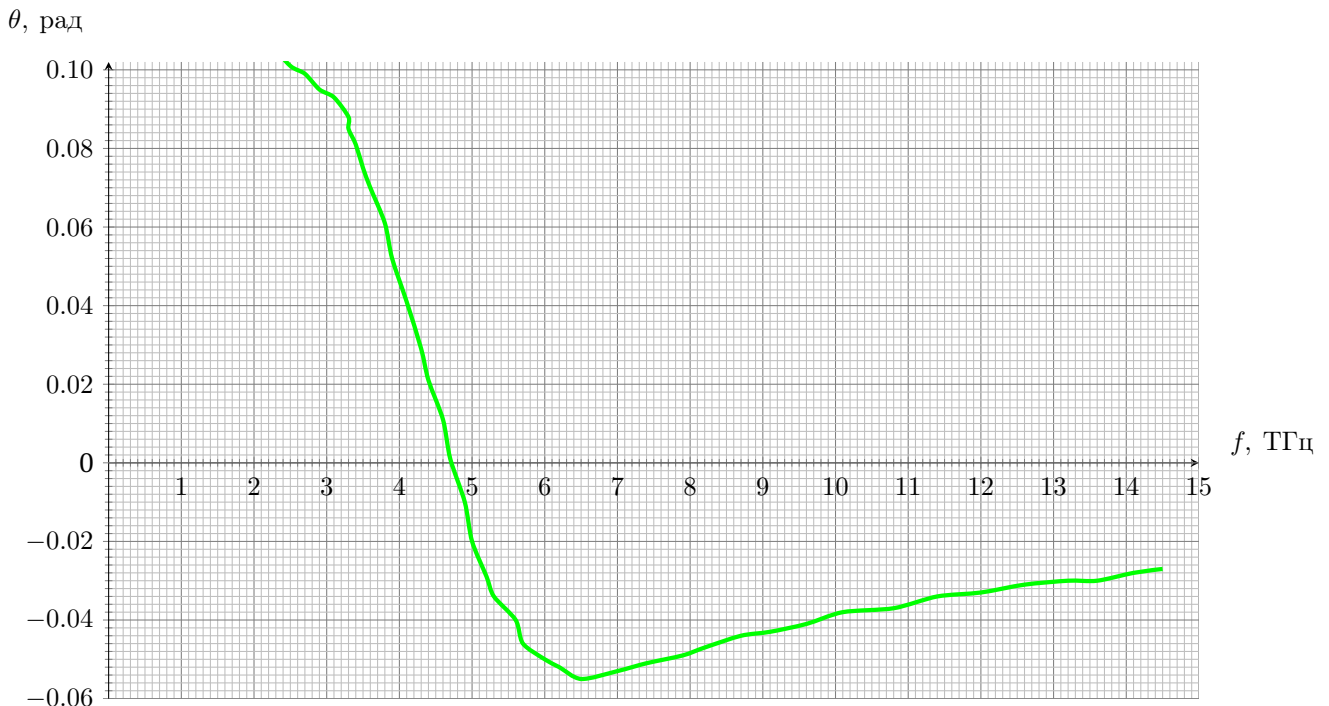


График зависимости угла поворота в графене от частоты излучения. Данные из статьи Crassee, I., Levallois, J., Walter, A. et al. Nature Phys 7, 48–51 (2011). $1 \text{ ТГц} = 10^{12} \text{ Гц}$

Road to IPhO

Описать проводимости графена элементарными методами сложно. Однако оказывается, что формула для эффекта Фарадея из **В6** все еще применима, если выбрать правильные значения параметров D и ω_B . Вместо ω_B нужно использовать найденное в **С1** выражение. Произведение Dh нужно заменить на постоянную D_2 (двумерный аналог коэффициента Друде), которую можно оценить по формуле

$$D_2 = \frac{q^2}{2\hbar^2} \varepsilon_F.$$

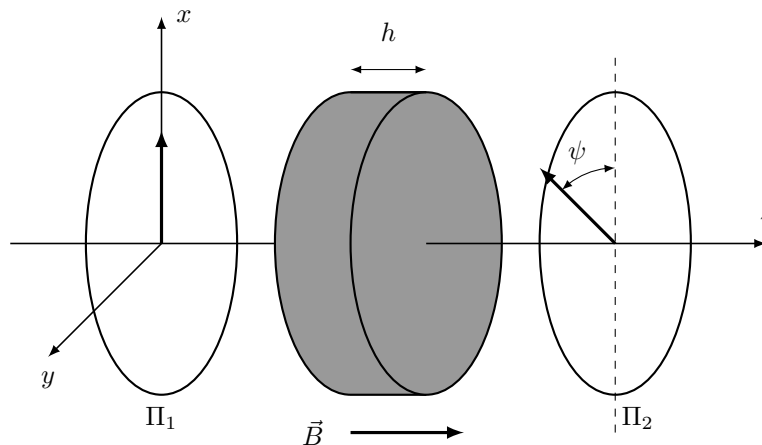
С2 Проанализировав приведенный график, определите для исследуемого образца графена параметры D_2 , τ и ω_B . Магнитное поле $B = 7$ Тл. При анализе графика можно считать, что $\omega_B \tau \gg 1$. **1.5**

С3 Используя результаты предыдущего пункта, определите значения ε_F (в электронвольтах) и v_F . **0.5**

Часть D. Оптический изолятор (1.0 балла)

На эффекте Фарадея основано устройство оптического изолятора. Это оптическое устройство, для которого интенсивность прошедшего света зависит от направления распространения. Это позволяет уменьшить интенсивность прошедшего обратно отраженного света.

Рассмотрим простейшую модель оптического изолятора. Она состоит из двух поляризаторов, разрешенные направления которых повернуты на угол θ друг относительно друга. Между ними расположено вещество, для которого угол поворота плоскости поляризации волны, распространяющейся вдоль оси z , имеет вид $\varphi = VhB_z$, где V – постоянная Верде, h – толщина слоя вещества, B_z – проекция приложенного магнитного поля.



D1 Пусть на систему слева падает естественный свет с интенсивностью I_0 . Найдите интенсивность I_1 излучения на выходе из системы. Найдите также интенсивность I_2 на выходе, если такой же естественный свет падает на систему справа. При каких значениях B_z отношение интенсивностей I_2/I_1 будет минимально? **1.0**