

Road to IPhO

Радуга семицветная

Радуга — сравнительно частое и завораживающее атмосферное явление. Ее изучением занимались с древних времен, однако веками радуга оставалась загадкой. В XIII–XIV веках персидский учёный аль-Фариси и европеец Теодорих Фрайбергский независимо показали, что она возникает из-за преломления и отражения света в каплях воды, используя стеклянные сферы. В 1637 году Декарт математически описал точное положение радуги на небе. Однако природу её цвета объяснил лишь Ньютон в 1666 году: в опытах с призмами он доказал, что белый свет состоит из всех цветов радуги, а сама радуга — это дисперсия света в каплях дождя.

Сейчас же мы за час попытаемся повторить весь этот тернистый путь в 400 лет и разобраться в физике этого атмосферного явления.

Математические подсказки:

•

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

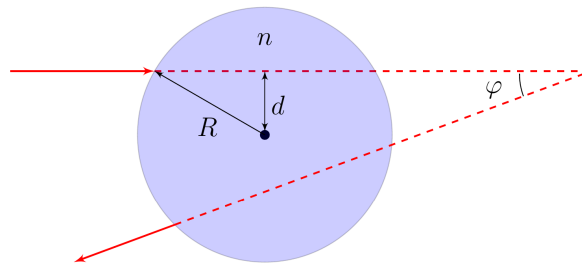
- При малом изменении аргумента некоторой функции $f(x)$ ее изменение можно приблизить как $f(x+a) - f(x) \approx f'(x)a$, где a мало

Часть А. Радуга (6.5 балла)

Будем представлять себе капли водяного тумана идеализированными однородными шарами небольшого неизвестного радиуса R , состоящими из чистой воды с показателем преломления n . Показатель преломления атмосферного воздуха постоянен и для любой длины волны равен единице ($n_{\text{воздух}} = 1$).

Рассмотрим солнечный луч, вошедший в сферическую каплю с прицельным параметром d . Для наглядности на рисунке он изображён красным цветом, однако в действительности является белым и содержит в себе весь видимый человеком спектр. Далее сосредоточим внимание на той его части, которая отразилась от внутренней поверхности капли один раз, а далее вышла наружу под некоторым острым углом φ от начального направления луча.

Пока что мы считаем показатель преломления одинаковым для всех длин волн, так что луч остаётся белым всё время.



A1 Схематично изобразите ход луча, испытывающего одно отражение внутри капли. **0.5**

A2 Пусть α — угол между падающим лучом и радиусом в точке, где происходит преломление, β — угол луча с радиусом после преломления. Выразите угол φ через α, β . **1.2**

A3 Получите зависимость $\varphi(d)$ при $0 \leq d \leq R$. Выразите ответ через d, R, n . **0.5**

A4 Вычислите производную $\varphi'(d)$. Постройте качественный график зависимости $\varphi(d)$. **0.5**

A5 Рассмотрим луч конечной ширины $b \ll R, d$, которому отвечает интервал прицельных параметров от d до $d+b$. Определите ширину интервала углов $\Delta\varphi$ (т.е. его угловую ширину) для данного луча. Выразите ответ через $\varphi'(d), b$. **0.2**

Road to IPhO

A6 Если интенсивность падающего луча постоянна, интенсивность луча, вышедшего из капли, будет тем больше, чем меньше его угловая ширина. Определите значение d_0 , которое отвечает максимальной интенсивности вышедшего луча. Выразите ответ через R, n . Под этим углом и будет наблюдаться радуга. Примечание: интенсивностью света называется энергия, проходящая через единицу площади в единицу времени. Это не потребуется вам для решения задачи. **1.0**

A7 Схематично изобразите ход через каплю для 3 лучей со значениями прицельного параметра $d_0, d_0 + b_1, d_0 - b_2$, где b_1, b_2 – малые положительные величины. **0.5**

A8 Солнце, наблюдатель и радуга образуют некоторую фиксированную геометрическую конфигурацию. Изобразите ее. Укажите направление падающих от Солнца лучей, область, где находятся капли, и положение точек, в которых видна радуга. **0.5**

A9 Вычислите половинный угол раствора радуги как функцию $\varphi_0(n)$, а также получите численный ответ для $n = n_{\text{воды}} = 4/3$. Выразите ответ в градусах и округлите до целых. **0.5**

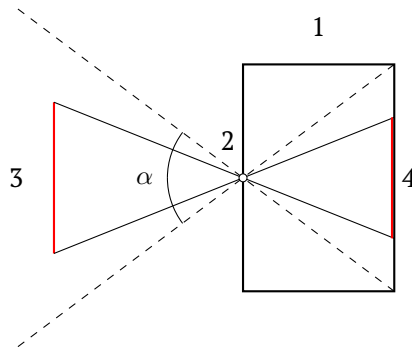
A10 При каком максимальном значении ψ угловой высоты Солнца над горизонтом еще можно наблюдать радугу? **0.5**

A11 Ниже приведены несколько картин художников разных эпох (см. листы в конце условия). На всех них изображена радуга. Для каждой из них в листе ответов укажите (поставьте знак \checkmark в нужном столбце), корректно или некорректно изображена радуга. Примечание: неверный выбор для любой из картин приводит к уменьшению баллов за пункт. Суммарный балл за пункт не может быть отрицательным. **0.6**

Часть В. Камера-обскура и дисперсия (3.5 балла)

Камера-обскура — это простейший вид устройства, позволяющего получать оптическое изображение объектов.

Она представляет собой светонепроницаемый ящик с малым отверстием в одной из стенок и экраном на противоположной стенке. Лучи света проходят через это отверстие и создают перевёрнутое изображение на экране. Фокусное расстояние камеры совпадает с расстоянием между отверстием и экраном.



Схематичное изображение камеры-обскуры: 1 — светонепроницаемый ящик, 2 — малое отверстие, 3 — радуга, 4 — изображение радуги

B1 В модели камеры-обскуры при помощи линейки с делениями определите горизонтальный угол обзора α объектива, который использовали при съёмке следующего кадра. **1.5**

В общем случае зависимость показателя преломления от длины волны $n(\lambda)$ — сложная функция. Однако в области видимого света мы опишем эту зависимость приближённо:

$$n(\lambda) = n_0 + D(\lambda - \lambda_0),$$

где $n_0 = 1.3330$, $\lambda_0 = 589$ нм, D — коэффициент дисперсии.

Road to IPhO



Радуга с борта самолёта

В2 В модели камеры обскуры по приведённому снимку при помощи линейки с делениями определите коэффициент дисперсии для воды. Полагайте для красной границы видимого света $\lambda_k = 750$ нм, а для фиолетовой $\lambda_\phi = 380$ нм. **2.0**