Магнитный резонанс и внешние флуктуации

Причина магнитных свойств материалов — магнитный момент, связанный с моментом импульса микроскопических частиц, таких как электроны и атомные ядра. В некоторых веществах магнитные моменты выравниваются в одном направлении, и они приобретают ненулевую намагниченность. В других веществах магнитные моменты ориентированы хаотично, но при помещении во внешнее магнитное поле эти моменты поворачиваются в направлении внешнего поля, и в среднем вещество приобретает ненулевую намагниченность.

Часть A. Вынужденные колебания гармонического осциллятора (3.6 балла)

Чтобы научиться работать со случайными процессами методами классической механики, исследуем вынужденные колебания гармонического осциллятора массой m и угловой частотой ω_0. Энергия осциллятора изменяется под действием внешней силы, которая зависит от времени:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 q(t)}{\mathrm{d}t^2} + m\omega_0^2 q(t) = F(t), \tag{1}$$

где внешняя сила определяется следующей ступенчатой функцией:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ +mf_0, & 0 \le t < T_0/2 \\ -mf_0, & T_0/2 \le t < T_0 \\ 0, & t \ge T_0 \end{cases}$$

Здесь $\omega_0 = 2\pi/T_0$ — угловая частота осциллятора $q(t)$. Предположим, что начальные условия заданы как $q(0) = A\sin\delta$, $\dot{q}(0) = A\omega_0\cos\delta$.

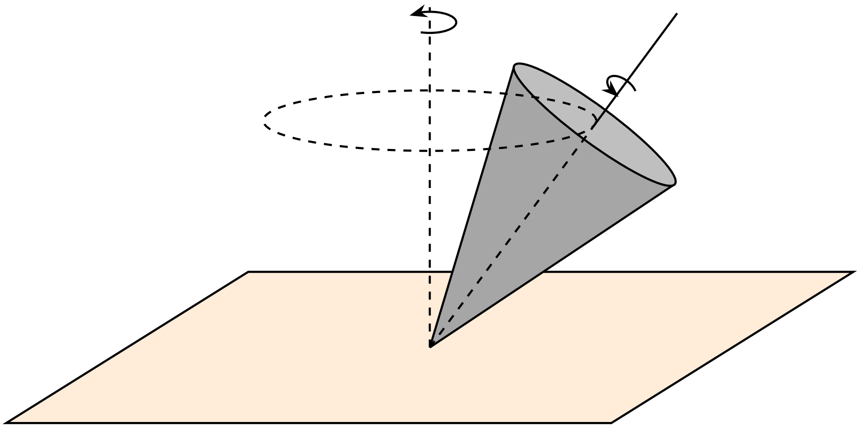
До включения внешней силы энергия сохраняется, и её значение равно $E_0 = m\omega_0^2 A^2/2$. Без ограничения общности, будем считать $-\pi \le \delta < \pi$.

A1 Найдите положение q и скорость $\dot{q} = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ осциллятора в момент времени $t = T_0$. Выразите их через A, δ, f_0, ω_0. **1.2**

A2 Полная механическая энергия осциллятора равна $E(t) = m(\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2)/2$. Найдите разность энергий $E(t)$ между моментами времени $t = T_0$ и $t = 0$, вызванную действием внешней силы $F(t)$. Иными словами, найдите $\Delta E \equiv E(t \ge T_0) - E(t \le 0)$. Выразите ответ через A, δ, f_0, ω_0. **1.2**

A3 Пусть δ — случайная величина, равномерно распределённая в интервале $-\pi \le \delta < \pi$. Иными словами, рассмотрим большое число осцилляторов, подчиняющихся уравнению (1). У всех них A одинаково, а δ выбирается случайно из диапазона $-\pi \le \delta < \pi$. Вычислите среднее значение поглощаемой ими энергии $\langle \Delta E \rangle$, а также средний квадрат $\langle (\Delta E)^2 \rangle$. **1.2**

Часть B. Прецессия магнитного диполя (6.4 балла)



Энергия магнитного диполя в магнитном поле $\vec{B}$ определяется следующим образом:

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\gamma \vec{S} \cdot \vec{B}$$

Рассмотрим бесконечно малый поворот вектора момента импульса $\vec{S}$. Приравняв разность энергий к работе момента силы ($\vec{\tau}$), можно получить уравнение для $\vec{S}$:

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t} = \gamma \vec{S} \times \vec{B}$$

Из этого уравнения следует, в частности, что когда $\vec{B}$ — постоянная величина, то вектор момента импульса (спин) $\vec{S}$ вращается вокруг направления магнитного поля $\vec{B}$. Это явление называется Ларморовской прецессией. Её частота в этом случае равна $\gamma|\vec{B}|$ и не зависит от угла между $\vec{S}$ и $\vec{B}$.

Излучение света с круговой поляризацией

Рассмотрим, что произойдёт, если в дополнение к постоянной составляющей вдоль оси z включить переменное магнитное поле в плоскости xy. Магнитная энергия в этом случае равна:

$$E = -\omega_0 S_z - \omega_1 \cos(\omega_2 t) S_x - \omega_1 \sin(\omega_2 t) S_y, \tag{2}$$

где ω_0, ω_1 определяются соответствующими компонентами магнитного поля и γ, а ω_2 — частота колебаний переменной составляющей магнитного поля. Считайте, что все три величины ω_0, ω_1, ω_2 положительны. Уравнения для $\vec{S}$ принимают вид:

$$\begin{cases} \dot{S}_x = +\omega_0 S_y - \omega_1 \sin(\omega_2 t) S_z \\ \dot{S}_y = -\omega_0 S_x + \omega_1 \cos(\omega_2 t) S_z \\ \dot{S}_z = -\omega_1 \cos(\omega_2 t) S_y + \omega_1 \sin(\omega_2 t) S_x \end{cases}$$

Эти уравнения удобно переписать, если ввести $S_\pm \equiv S_x \pm i S_y$. Получим:

$$\begin{cases} \dot{S}_+ = -i\omega_0 S_+ + i\omega_1 e^{+i\omega_2 t} S_z \\ \dot{S}_- = +i\omega_0 S_- - i\omega_1 e^{-i\omega_2 t} S_z \\ \dot{S}_z = \dfrac{i\omega_1}{2}\left(e^{-i\omega_2 t} S_+ - e^{+i\omega_2 t} S_-\right) \end{cases}$$

Теперь введём спин во **вращающейся системе отсчета**, определив $S_\pm \equiv e^{\pm i\omega_2 t}\Sigma_\pm$, $S_z \equiv \Sigma_z$. Можно показать, что тогда уравнения для $\Sigma_x \equiv (\Sigma_+ + \Sigma_-)/2$, $\Sigma_y \equiv i(\Sigma_- - \Sigma_+)/2$ и Σ_zмогут быть записаны в виде:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\Sigma} = \vec{M} \times \vec{\Sigma}$$

где $\vec{\Sigma} = (\Sigma_x, \Sigma_y, \Sigma_z)$ и $\vec{M} = (M_x, M_y, M_z)$.

B1	Выразите компоненты M_x, M_y, M_z через ω_0, ω_1, ω_2.	**1.5**

Уравнения упрощаются ещё сильнее, если повернуть систему отсчёта в плоскости xz и ввести новые переменные $\Sigma_X, \Sigma_Y, \Sigma_Z$ следующим образом:

$$\begin{cases} \Sigma_X = \Sigma_x \cos\Theta - \Sigma_z \sin\Theta \\ \Sigma_Y = \Sigma_y \\ \Sigma_Z = \Sigma_x \sin\Theta + \Sigma_z \cos\Theta \end{cases}$$

B2	Получите уравнения, описывающие изменение $\Sigma_X, \Sigma_Y, \Sigma_Z$ со временем. В них должны входить M_x, M_y, M_z и Θ.	**0.9**

Эти уравнения можно привести к виду:

$$\begin{cases} \dot{\Sigma}_X = +\Omega\Sigma_Y \\ \dot{\Sigma}_Y = -\Omega\Sigma_X \\ \dot{\Sigma}_Z = 0 \end{cases}$$

если выбрать Ω и $\operatorname{tg}\Theta$ соответствующим образом.

B3	Используя результаты пунктов **B1** и **B2**, выразите Ω и $\operatorname{tg}\Theta$ через ω_0, ω_1, ω_2.	**1.0**

Рассмотрим теперь большое количество спинов со следующими средними значениями компонент в момент времени $t = 0$: $\langle S_x(0)\rangle = \langle S_y(0)\rangle = 0$ и $\langle S_z(0)\rangle > 0$. Все спины подчиняются уравнениям, выведенным из (2).

B4	Получите выражение для $\langle S_z(t)\rangle$.	**1.5**

B5	Оказалось, что в моменты времени, равные нечётным кратным T_1 (т.е. $t = T_1, 3T_1, 5T_1, \ldots$), имеет место $\langle S_z(t)\rangle = 0$. При этом во все остальные моменты времени выполняется $\langle S_z(t)\rangle > 0$. Вычислите $\omega_1 T_1$.	**1.5**