Явление приливного захвата

Если изолированная планета шарообразной формы покрыта тонким слоем жидкости, форма поверхности жидкости будет стремиться к сферической в силу принципа минимума потенциальной энергии. Если же рядом с планетой есть другие тела, они будут искажать форму поверхности жидкости. Это связано с приливными силами, которые возникают за счет того, что разные участки жидкости притягиваются этому телу с различными силами. Такие силы являются причиной приливов и отливов на поверхностях планет, почему и получили свое название.

В задаче рассматривается следующая система. Два однородных шарообразных тела (планеты) массами m (малое тело) и M (большое тело, $M > m$) движутся по круговым орбитам вокруг общего центра масс. Расстояние между центрами тел равно L, радиус большого тела равен R ($L \gg R$), а малое тело можно считать точечным. Поверхность большого тела покрыта тонким слоем жидкости плотность ρ, форма поверхности которой является объектом изучения.

Вам предстоит определить форму поверхности большого тела при синхронном вращении, когда угловая скорость орбитального вращения тел совпадает с угловой скоростью вращения большого тела вокруг собственной оси. Далее вам нужно описать динамику приливного захвата, то есть процесса перехода к синхронному вращению.

Часть A. Синхронное вращение (2.7 балла).

В этой части задачи рассматривается синхронное вращение. Большое тело вращается вокруг своей оси с угловой скоростью, равной угловой скорости орбитального вращения тел ω.

A1	Получите точное выражение для угловой скорости орбитального вращения ω. Ответ выразите через G, m, M и L.	**0.7**

Перейдём в неинерциальную систему отсчёта, связанную с центром большого тела и вращающуюся так, что центр малого тела в ней неподвижен. Напомним выражение для ускорения в неинерциальной системе отсчёта с началом в точке O, движущимся с ускорением $\vec{a}_0$, координатные оси которой вращаются с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$:

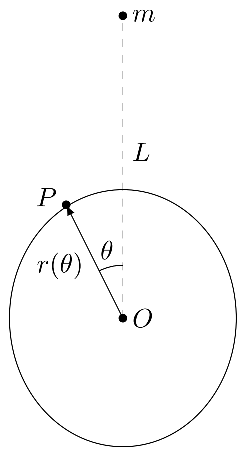
$$\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{a} - \vec{a}_0 + \omega^2 \vec{r}_\perp - \left[\vec{\varepsilon} \times \vec{r}\right] - 2\left[\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн}}\right].$$

Здесь $\vec{a}$ – ускорение в инерциальной системе отсчёта, $\vec{r}_\perp$ – компонента радиус-вектора частицы, перпендикулярная оси вращения, а $\vec{v}_{\text{отн}}$ – скорость частицы относительно неинерциальной системы отсчёта. Во всех пунктах задачи ограничивайтесь только первыми тремя слагаемыми:

$$\vec{a}_{\text{отн}} \approx \vec{a} - \vec{a}_0 + \omega^2 \vec{r}_\perp.$$

Задача является плоской, поэтому считайте, что $\vec{r}_\perp = \vec{r}$, если обратное не оговорено.

Обозначим центр большого тела за O. Далее во всех пунктах задачи, если обратное не оговорено, исследуется форма поверхности большого тела в сечении, перпендикулярном угловой скорости орбитального вращения, содержащем малое тело и точку O. Рассмотрим точку P на поверхности большого тела, лежащую на прямой, проходящей через точку O и образующей угол θ с линией, соединяющей меньшее тело с точкой O. Обозначим расстояние между точками O и P за $r(\theta)$.



A2	Получите точное выражение для разности потенциалов гравитационного поля малого тела $\Delta\varphi_{\text{гр}} = \varphi_{\text{гр}P} - \varphi_{\text{гр}O}$ в точках P и O. Ответ выразите через G, m, L, θ и $r(\theta)$.	**0.2**

A3	Получите точное выражение для разности потенциалов сил инерции $\Delta\varphi_{\text{ин}} = \varphi_{\text{ин}P} - \varphi_{\text{ин}O}$ в точках P и O. Ответ выразите через G, m, M, L, θ и $r(\theta)$.	**0.5**

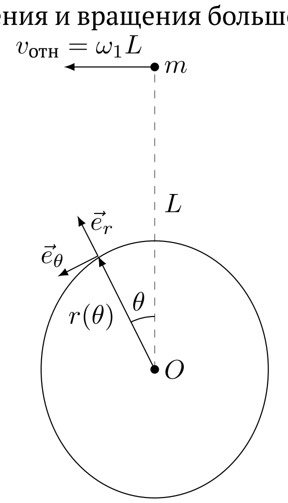
Представим форму поверхности в виде $r(\theta) = R + h(\theta)$, где $h(\theta) \ll R$, а $h(\pi/2) = 0$.

A4 Получите зависимость $h(\theta)$. Ответ выразите через m, M, R, L и θ. Максимально упростите ваш ответ. Качественно изобразите форму поверхности в рассматриваемом сечении. На этом же рисунке изобразите невозмущённую форму поверхности. **1.3**
Примечание: воспользуйтесь следующим приближением:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\theta}} \approx 1 + a\cos\theta + \frac{a^2(3\cos^2\theta - 1)}{2}$$

Часть B. Осциллирующая поверхность (3.8 балла).

Мы рассмотрели поведение системы в установившемся режиме. Далее будем изучать переходные процессы, которые приводят к выравниваю угловых скоростей орбитального движения и вращения большого тела вокруг своей оси.



В этой части задачи угловая скорость вращения большого тела равна Ω и считается постоянной. Перейдём в неинерциальную систему отсчёта, связанную с точкой O и вращающуюся с угловой скоростью Ω. Будем рассматривать то же сечение большого тела, что и в части A. Введём для данной части задачи следующее обозначение:

$$\omega_1 = \omega - \Omega$$

Для решения задачи нам понадобится компонента силы F_τ, направленная вдоль вектора $\vec{e}_\theta$. Она определяется силами инерции и гравитационной силой малого тела, и зависит от угла θ и от времени t. Будем отсчитывать время t от момента, показанного на рисунке.

B1 Покажите, что касательную компоненту силы $F_\tau(t,\,\theta)$, действующую на частицу массой Δm, находящуюся на поверхности большего тела под углом θ, можно представить в виде: **0.5**

$$F_\tau(t,\,\theta) = \Delta m\alpha\sin(2\omega_1 t - 2\theta)$$

Найдите α. Ответ выразите через G, m, L и $r(\theta)$.
Примечание: воспользуйтесь результатами, полученными при решении пункта A4.

Из закона изменения момента импульса для элемента поверхности жидкости можно получить, что его уравнение движения эквивалентно уравнению вынужденных колебаний:

$$\Delta m R^2\left(\ddot\theta + 2\gamma\dot\theta + \omega_0^2(\theta-\theta_0)\right) = F_\tau(t,\theta)R,$$

где γ и ω_0 – постоянные величины, θ_0 – положение элемента жидкости в равновесии. Считайте, что $\omega_0 \gg \sqrt{Gm/L^3}$. Во всех пунктах считайте, что $\theta-\theta_0 \ll 1$, поэтому справедливо приближение $F(t,\,\theta)\approx F(t,\,\theta_0)$.

B2 Покажите, что зависимость $\theta(t,\theta_0)$ имеет следующий вид: **0.8**

$$\theta(t) = \theta_0 + A\sin(2\omega_1 t - 2\theta_0 - \varphi_0)$$

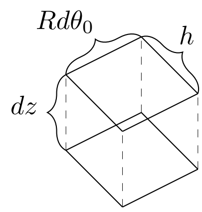
Найдите A и φ_0. Ответы выразите через G, m, L, γ, ω_0, ω, Ω и θ_0.

Далее для удобства будем использовать угол $\varphi_1 = 2\theta_0 + \varphi_0$ и записывать выражение для $\theta(t)$ в следующем виде:

$$\theta(t,\theta_0) = \theta_0 + A\sin(2\omega_1 t - \varphi_1)$$

Для определения зависимости $h(t,\theta)$ представим её в следующем виде:

$$h(t,\theta) = h_0 + h'(t,\theta) \qquad h'(t,\theta) \ll h_0$$



Рассмотрим прямоугольный параллелепипед со сторонами h, $Rd\theta_0$ и dz, соответствующий углу θ_0, где dz, θ_0 и $d\theta_0$ - постоянные величины. Объём воды в этом параллелепипеде равен:

$$dV = hRd\theta_0 dz.$$

Этот объем меняется, поскольку жидкость втекает и вытекает через грани hdz параллелепипеда с разными скоростями, что приводит к изменению высоты h. Считайте, что через грани $hRd\theta_0$ жидкость не течёт. Жидкость несжимаема.

B3	Получите выражение для скорости роста высоты $\dot{h}'(t,\theta_0)$ в момент времени t при угле θ_0. Ответ выразите через h_0 и $\frac{d\dot{\theta}}{d\theta_0}$	**0.4**

B4	Считая, что амплитуда колебаний h' одинакова для всех значений θ_0, получите зависимость $h(t)$. Ответ выразите через h_0, A, ω_1, φ_1 и t.	**0.3**

B5	Для момента времени t определите значения углов θ_0, соответствующих максимальному значению $h(t,\theta_0)$. Ответы выразите через ω_1, t и φ_0.	**0.4**

Для поиска момента сил, действующих на большое тело, потребуется рассмотреть произвольное сечение большего тела. Будем отсчитывать угол β от оси вращения большего тела. Тогда радиус сечения большего тела в перпендикулярной плоскости равен $r = R\sin\beta$. Считайте, что для описания зависимости $\theta(t,\theta_0,\beta)$ и $h'(t,\theta_0,\beta)$ достаточно везде заменить радиус R на расстояние до оси вращения $R\sin\beta$.

B6	Найдите момент сил M_z, действующий со стороны малого тела на поверхность большого относительно оси z. Ответ выразите через G, m, ρ, R, h_0, L, A и φ_0.	**1.4**

Часть C. Приливной захват в системе Земля-Луна (3.5 балла).

Приливным захватом называют выравнивание угловых скоростей орбитального вращения и вращения вокруг собственной оси. В этой части задачи вам предстоит определить параметры ω_0 и γ для модели, рассмотренной в части **B**, а также оценить время, в течении которого происходит приливной захват в системе Земля-Луна.

Считайте известными следующие данные:

1. масса Земли $M = 5{,}97\cdot10^{24}$ кг;
2. масса Луны $m = 7{,}36\cdot10^{22}$ кг;
3. радиус Земли $R = 6{,}38\cdot10^{6}$ м;
4. плотность воды $\rho = 1{,}00\cdot10^{3}$ кг/м^3;
5. гравитационная постоянная $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2;
6. сейчас расстояние между Землей и Луной составляет $L_0 = 3{,}84\cdot10^{8}$ м;
7. сейчас Земля вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью $\Omega_0 = 7{,}27\cdot10^{-5}$ с$^{-1}$.

C1	Найдите орбитальную угловую скорость вращения $\omega_{\text{синх}}$ и расстояние $L_{\text{синх}}$ между Землёй и Луной при синхронном вращении. Выразите ответы через m,M, R, G, L_0, Ω_0 и найдите их численные значения. *Примечание:* при синхронном вращении моментом импульса Земли, связанным с вращением вокруг ее оси, можно пренебречь.	**0.8**

C2	Расстояние между Землей и Луной увеличивается со скоростью $\dot{L}_0 = 1$ см/год. Найдите величину среднего углового ускорение Земли $\dot{\Omega}_0$. Выразите ответ через m,M, R, G, L_0, Ω_0, $\dot{L}_0$ и найдите его численное значение.	**0.7**

Для описания переходного процесса необходимы численные значения параметров ω_0 и γ. Для их определения считайте известным следующее:

1. сейчас положение прилива отстаёт от Луны на угол $\beta = 3^\circ$ в направлении её вращения относительно Земли. Отставание означает, что $\omega_0 > 2|\omega_1|$;
2. сейчас разность высот прилива и отлива составляет $0{,}24$ м;
3. средняя глубина мирового океана составляет $h_0 = 3{,}74$ км.

C3	Найдите численные значения ω_0 и γ.	**0.8**

C4	В рамках описанной модели найдите угловое ускорение Земли $\dot{\Omega}_{0(\text{мод})}$, которое получается из результатов пункта $\mathrm{B6}$. Сравните его со значением $\dot{\Omega}_0$, полученным в пункте $\mathrm{C2}$ и сделайте вывод о применимости рассматриваемой модели (считайте модель применимой, если Ω_0 и $\Omega_{0(\text{мод})}$ отличаются не более, чем в 10 раз).	**0.5**

Приливной захват в системе Земля-Луна можно разделить на два этапа:

1. относительно быстрый переход к орбитальному вращению с угловой скоростью $\omega_{\text{синх}}$, при котором расстояние от Земли до Луны практически совпадает с установившимся $L = L_{\text{синх}}$;
2. длительный процесс выравнивания угловых скоростей орбитального вращения и вращения Земли вокруг своей оси. Характерное время второго процесса τ_2 можно считать временем переходного к приливному захвату процесса.

C5	Оцените численное значение τ_2. Ответ выразите в годах.	**0.7**