

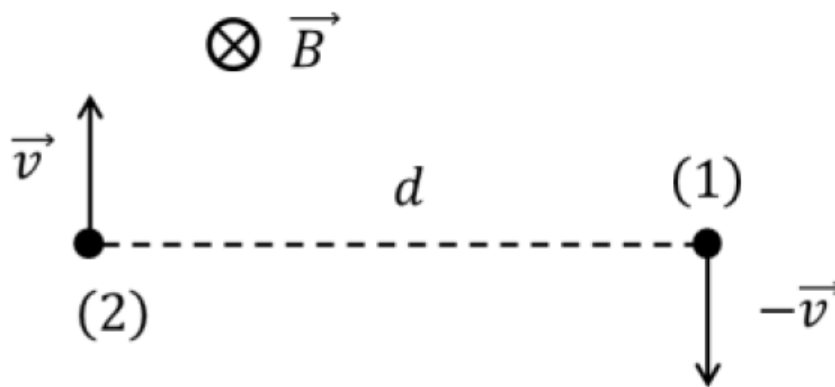
# Road to IPhO

## Электроны в магнитном поле (7 баллов)

Последние достижения в области нанотехнологий позволили создать «искусственные атомы», так называемые квантовые точки. Это нанометровые структуры, которые благодаря своим оптическим и электронным свойствам имеют разнообразные применения: от квантовых компьютеров, солнечных батарей до визуализации живых клеток. В этой задаче будет рассмотрена модель движения электронов в квантовой точке.

Рассмотрим движение двух электронов (массой  $m$  и зарядом  $q = -e$ ) в плоскости, перпендикулярной линиям однородного магнитного поля индукции  $\vec{B} = B\vec{k}$ . Электроны можно считать материальными точками, между которыми есть только кулоновское взаимодействие. Релятивистскими эффектами можно пренебречь.

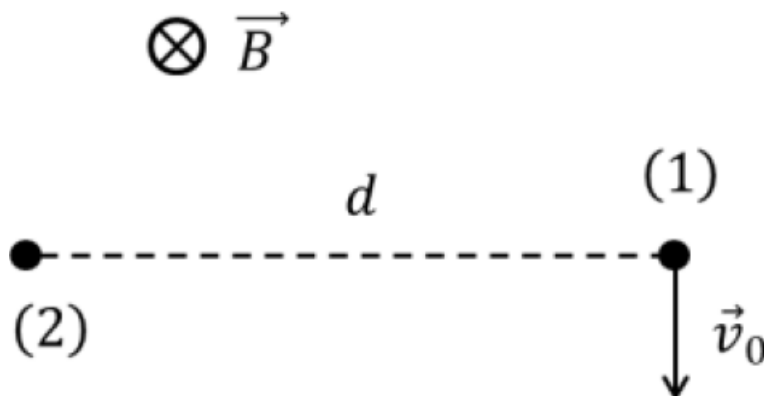
Пусть в начальный момент электроны находятся на расстоянии  $d$  друг от друга. Электронам сообщают одинаковые по модулю, но противоположные по направлению скорости, такие, что расстояние между ними не изменяется при дальнейшем движении.



**A1** Каким может быть минимальное расстояние  $d_{\min}$  между электронами, чтобы описанное выше движение было возможным? **1.0**

**A2** Найдите скорость  $v_m$ , которую нужно сообщить электронам, чтобы при их движении между ними сохранилось найденное в A1 расстояние  $d_{\min}$ . **0.5**

Рассмотрим теперь случай, когда только одному электрону сообщают в начальный момент времени скорость  $v_0$ , такую, что расстояние между ними не изменяется и остается равным  $d_1 = 2\sqrt[3]{\frac{m}{4\pi\epsilon_0 B^2}}$ .



**B1** Найдите угловую скорость центра масс  $\omega$  во время движения электронов. **0.5**

**B2** Найдите время, через которое у обоих электронов сравняются абсолютные значения скорости в первый раз. **1.0**

# Road to IPhO

Вернемся к модели из части А. Электроны находятся на расстоянии  $d$  друг от друга, и им сообщают противоположные скорости  $v_0$ .

**C1** Получите выражение для кинетической энергии одного электрона  $K = K(m, v_r, \omega, r)$ , где  $v_r = \frac{dr}{dt}$ ,  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ , **0.2**  
а  $r$  и  $\theta$  — задают положение электрона в системе центра масс.

**C2** Найдите, чему равна производная момента импульса по времени  $\frac{dL}{dt}$  при движении электронов. **0.8**

**C3** Найдите интеграл движения для рассматриваемого случая, т.е. найдите такую функцию  $J$ , для которой **0.5**  
справедливо  $\frac{dJ}{dt} = 0$ .

**Подсказка:** Вспомните июньские занятия.

**C4** Выразите полную энергию электрона в виде  $E = K(v_r) + U(r)$ . Выразите ее через  $J$ ,  $e$ ,  $B$ ,  $r$  и физические **1.0**  
постоянные.

**C5** Схематично изобразите график зависимости  $U(r)$ , укажите его характерные особенности. **0.5**

**C6** Разложите функцию  $U(r)$  в ряд Тейлора до первого нетривиального члена вблизи особых точек из пункта **1.0**  
**C5**. Основываясь на разложении, схематично изобразите траекторию электронов, которым сообщили небольшую радиальную компоненту скорости  $v_{r0}$  вдобавок к скорости движения по окружности  $v_0$ .

