Механическая модель фазовых переходов

В фазовом переходе второго рода «парамагнетик–ферромагнетик» свободная энергия (механический аналог которой — потенциальная энергия) зависит от намагниченности по следующему закону:

$$V(\mathcal{M}) = a(T)\mathcal{M}^2 + b(T)\mathcal{M}^4,$$

где T — температура, $b(T) > 0$, $a(T)$ может менять знак в зависимости от T.

Теоретическое описание этого фазового перехода, как будет показано в процессе решения задачи, перекликается с рассмотрением следующей механической системы.

На кольцо радиуса R надета маленькая бусинка массы m. Кольцо может вращаться вокруг своего вертикального диаметра с угловой скоростью ω (рис. 1). Сила F_f направлена против скольжения бусинки по кольцу, пропорциональна силе нормальной реакции опоры N и равна $F_f = fkN$, где число f может принимать значения 1 и -1: пусть $f = +1$, когда бусинка движется против часовой стрелки (в сторону возрастания угла θ), и $f = -1$, если наоборот. Таким образом, $f = \operatorname{sign}\dot{\theta}$ (равно $+1$ или -1 в зависимости от знака $\dot{\theta}$).

Используйте полярные координаты r, θ. Ответы выражайте через $\omega_c = \sqrt{g/R}$ (g — ускорение свободного падения).

Примечания

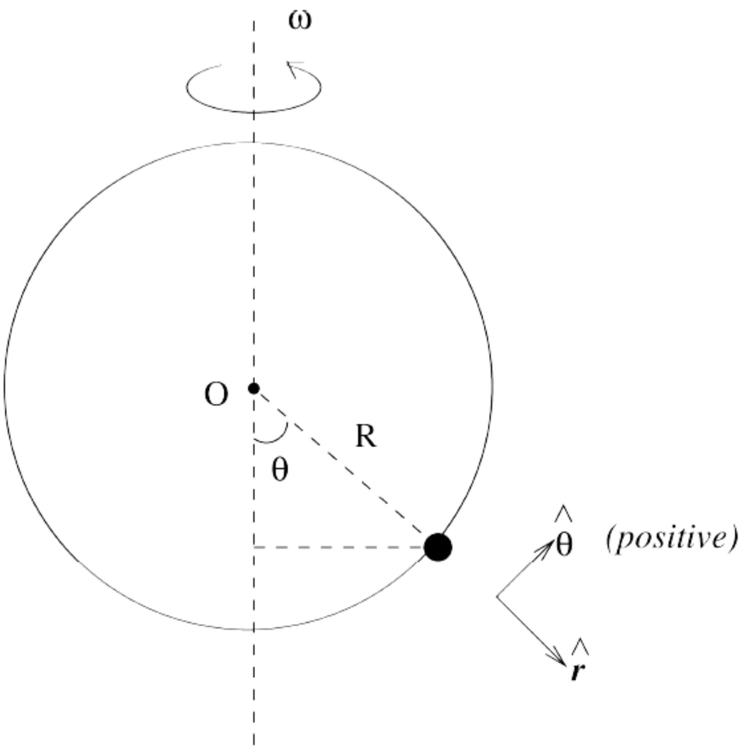
При вращении материальной точки по окружности радиуса R можно рассчитать скорость как $\dot{\vec{r}} = R\dot{\theta}\hat{\theta}$ и ускорение как $\ddot{\vec{r}} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}$, где введены единичные вектора $\hat{r}$ (вдоль радиуса) и $\hat{\theta}$ (вдоль касательной).

Также можете пользоваться разложениями (здесь θ — в радианах, $|x| \ll 1$):

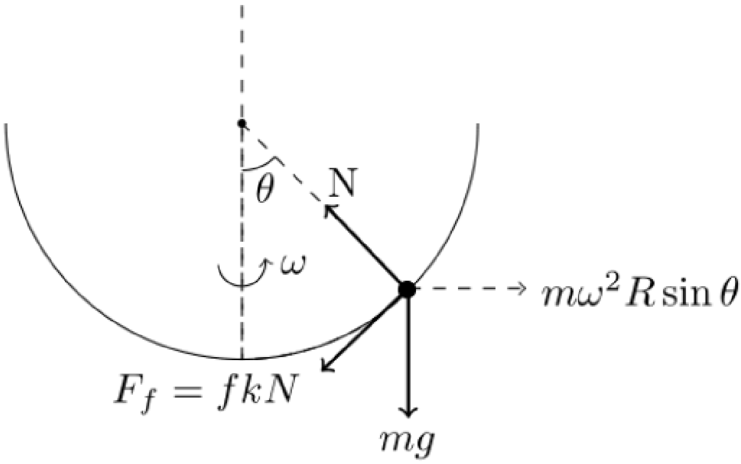
$\sin\theta = \theta - \dfrac{\theta^3}{6} + \ldots$

$\cos\theta = 1 - \dfrac{\theta^2}{2} + \dfrac{\theta^4}{24} + \ldots$

$(1+x)^n = 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3 + \ldots$



Перейдем в систему отсчета вращающегося кольца. Будем рассматривать углы $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. На рисунке 2 показаны силы, действующие на бусинку. Силами, не указанными на рисунке, можно пренебречь.



A1	Запишите законы движения бусинки в проекциях на радиальное и тангенциальное направления. (Считаем, что θ возрастает в направлении против часовой стрелки).	**0.5**

В пунктах с **B1** по **B9** считайте, что $k = 0$.

B1	Выразите углы θ_0, соответствующие положению(-ям) равновесия, через ω и ω_c.	**1.0**

B2	Схематично изобразите график зависимости θ_0 (по вертикальной оси) от ω/ω_c (по горизонтальной).	**0.5**

B3	Схематично изобразите график зависимости модуля силы нормальной реакции опоры N в положении устойчивого равновесия от ω/ω_c .	**0.5**

B4 Пусть F_θ — тангенциальная проекция суммы сил, действующих на бусинку. Можно определить соответствующую потенциальную энергию $V(\theta)$ следующим образом: **1.0**

$$F_\theta = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}V(\theta),$$

причем примем $V(\theta) = 0$ при $\theta = 0$.

$V(\theta)$ представимо в виде $V(\theta) = P + Q\cos(\theta) + S\sin^2(\theta)$. Выразите P, Q, S.

B5	$V(\theta)$ при малых θ представимо в виде $V(\theta) = a(\omega)\,\theta^2 + b(\omega)\,\theta^4$. Выразите коэффициенты $a(\omega)$ и $b(\omega)$.	**1.0**

B6	Схематично изобразите характерные графики зависимости $V(\theta)$ от θ для двух значений ω/ω_c: $\omega/\omega_c = 0.9$ и $\omega/\omega_c = 5.0$. Количественные расчеты не требуются.	**1.0**

B7 Теория Ландау фазовых переходов второго рода утверждает, что магнитную систему при температурах T выше критической температуры T_c можно считать парамагнитной, а при $T < T_c$ — ферромагнитной. Зависимость намагниченности $\mathcal{M}$ от температуры T задается формулой $\mathcal{M}(T) = \mathcal{M}_0\left(1 - \dfrac{T}{T_c}\right)^{1/2}$. Обозначим степень $1/2$ через β, т.е. пусть $\mathcal{M}(T) = \mathcal{M}_0\left(1 - \dfrac{T}{T_c}\right)^{\beta}$. **1.0**

Можно сопоставить описанную теорию фазовых переходов с рассмотренной ранее механической задачей. Что в механике служит аналогом величин $\mathcal{M}$, T_c, T/T_c? Чему в механике равна β?

B8	Выразите угловую частоту Ω_0 колебаний бусинки вблизи ее положения равновесия θ_0. Используйте, что для малых колебаний $\Omega_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{V''(\theta_0)}{m}}$.	**1.0**

B9	Схематично изобразите график зависимости Ω_0 от ω.	**1.0**

В оставшихся пунктах **C1** и **C2** считайте, что $k \neq 0$.

C1	Примите $f = 1$, а вместо k введите выражение $k = \operatorname{tg}\alpha$. Условие на положение(-я) равновесия θ_0 можно переписать в виде: $\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin y}$. Найдите x и y.	**1.0**

C2	Пусть $f = 1$ и $k = 0.05$. Вычислите углы θ_0 в положениях равновесия для двух случаев: • $\omega/\omega_c = 0.50$ • $\omega/\omega_c = 0.70$	**0.5**