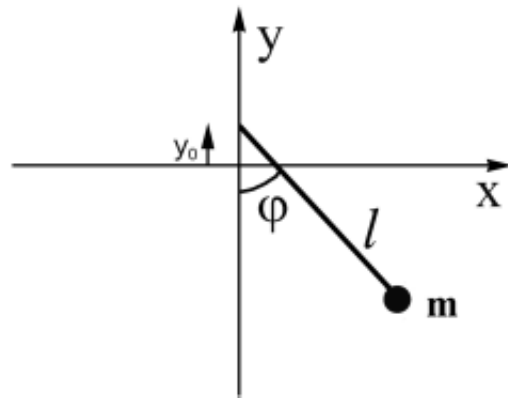
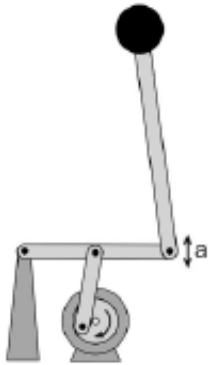


# Road to IPhO

## Маятник Капицы

Исследование равновесия различных механических систем представляет собой важную технологическую задачу. Например, процесс «ходьбы» (чрезвычайно сложный!) совершенно естественен. Однако при разработке человекоподобных роботов основная сложность возникает в процессе поддержания равновесия конструкции при ходьбе. Вам предлагается рассмотреть одну из простейших моделей, которая демонстрирует динамическое состояние равновесия, — маятник Капицы.

Модель состоит из физического маятника, состоящего из тела, материальной точки, массы  $m$ , соединенной с точкой опоры жестким невесомым стержнем длины  $l$ , который свободно вращается вокруг оси. В свою очередь ось может совершать колебания в вертикальном направлении амплитуды  $a \ll l$  и очень большой частоты  $\omega$ , т.е.  $y_0(t) = a \cos \omega t$ . Возможная практическая реализация этого представлена на рисунке слева, обозначения приведены на рисунке справа (угол, который стержень составляет с вертикалью обозначим  $\varphi$ ). Ускорение свободного падения равно  $\vec{g} = -g\vec{j}$ .



**A1** Система имеет одну степень свободы, угол  $\varphi$ , и положение маятника можно описать функцией этого угла. **0.5**  
Выразите декартовы координаты тела  $x(t)$  и  $y(t)$  как функции угла  $\varphi(t)$  и времени.

**A2** Найдите компоненты скорости  $v_x$  и  $v_y$  тела. Ответ выразите через угловую скорость  $\frac{d\varphi}{dt}$  и время. **0.5**

**A3** Найдите кинетическую энергию тела. Ответ выразите через угол  $\varphi$ , угловую скорость  $\frac{d\varphi}{dt}$  и время. **0.5**

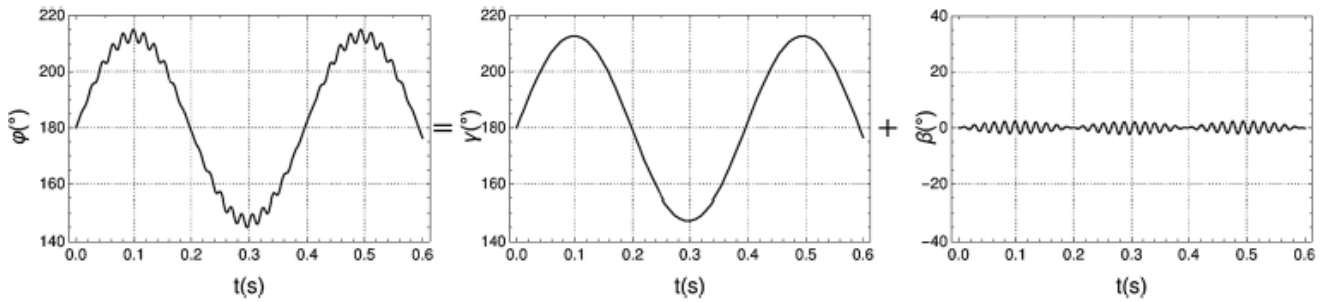
**A4** Получите выражение для мгновенной мощности  $N$  силы, прикладываемой к точке подвеса маятника. Ответ выразите через  $m, g, l, a, \omega, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d^2\varphi}{dt^2}$  и время. **1.0**

**A5** Покажите, что уравнение движения выглядит следующим образом: **1.0**

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{1}{l}(g - a\omega^2 \cos \omega t) \sin \varphi.$$

При определенных условиях для малых значений амплитуды  $a$  и больших значений частоты колебаний оси  $\omega$  решение уравнения из пункта **A5** демонстрирует особое поведение: движение ведет себя как суперпозиция двух компонент:  $\gamma$ , которая медленно изменяется во времени и имеет большую амплитуду, и второй компоненты  $\beta$ , которая быстро меняется со временем и имеет небольшую амплитуду.

# Road to IPhO



Таким образом можно разложить  $\varphi = \gamma + \beta$ , где  $\gamma \gg \beta$  и значение медленной компоненты  $\gamma$  можно считать постоянным для достаточного числа периодов быстрой компоненты  $\beta$ .

**B1** Покажите, что выражение для быстрой компоненты  $-\beta = -\frac{g}{l} \sin \gamma \cos \omega t$  (для произвольного значения  $\gamma$ ) является приближенным решением уравнения движения из пункта **A5** при указанных выше условиях. Рассмотрите режим колебаний, в котором  $g$  пренебрежимо мал по сравнению с  $a\omega^2$ , т.е.  $a\omega^2 \gg g$ . **1.0**

**B2** Комбинируя уравнение движения из пункта **A5** с разложением  $\varphi = \gamma + \beta$  и с выражением из предыдущего пункта, найдите выражение для  $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ , которое описывает динамику медленной компоненты  $\gamma$  усредняя по большому количеству быстрых колебаний с частотой  $\omega$ , пренебрегая только членами порядка  $a^n$ , где  $n > 2$ . Выразите  $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$  через  $g, a, \omega, l$  и  $\gamma$ . Упростите окончательное выражение, считая  $l\omega^2 \gg a\omega^2 \gg g$ . **2.5**

Теперь перейдём в систему отсчета, связанную с точкой подвеса маятника. Во всех дальнейших пунктах все величины требуется найти в этой системе отсчета. Пренебрежения из пункта **B2** справедливы здесь и в последующих пунктах задачи.

**B3** Получите выражение для усредненного по времени момента всех сил  $M_O$ , действующих на маятник относительно точки подвеса. Ответ выразите через  $m, g, l, a, \omega$  и  $\gamma$ . **0.7**

**B4** Назовем эффективным потенциалом скалярную функцию  $V(\gamma)$ , производная которой по углу  $\gamma$  равняется усредненному моменту сил из предыдущего пункта, взятому со знаком минус. Получите выражение для эффективного потенциала  $V(\gamma)$  с точностью до произвольной постоянной. Ответ выразите через  $m, g, l, a, \omega$  и  $\gamma$ . **0.7**

**B5** Покажите, что для  $(a\omega)^2 > 2gl$  этот потенциал имеет несколько минимумов: минимум при  $\gamma = 0$ , который появляется в случае свободных колебаний маятника; дополнительный минимум  $\gamma = \pi$ . Покажите, что оба положения удовлетворяют условиям устойчивого равновесия. **1.0**

**B6** Найдите периоды колебаний  $T_0$  и  $T_\pi$  величины  $\gamma$ , соответствующие положениям из пункта **B5**. **0.6**