

# Road to IPhO

## Скрипящая дверь

Скрип очень распространен в повседневной жизни, и наблюдается при закрывании дверей, при письме мелом на доске, при игре на скрипке, при ходьбе в новой обуви и других явлениях. В Израиле причины, обуславливающие скрип, вызывают сильные землетрясения, повторяющиеся один раз в несколько десятилетий. Они происходят недалеко от Мертвого моря, чуть выше самого глубокого из известных разломов в земной коре.

Физический механизм скрипа кроется в различии между коэффициентом трения покоя и коэффициентом трения скольжения. В данной задаче мы изучим этот механизм применительно к открывающейся двери.

### Часть А. Простейшая модель (7.5 баллов)

Рассмотрите следующую систему (см. рис. 1): К телу массой  $m$  присоединена длинная идеальная пружина с коэффициентом жесткости  $k$ , другой конец которой тянут с постоянной скоростью  $u$ . Коэффициент трения покоя и коэффициент трения скольжения о поверхность равны  $\mu_s$  и  $\mu_k$ , причем  $\mu_k < \mu_s$ .

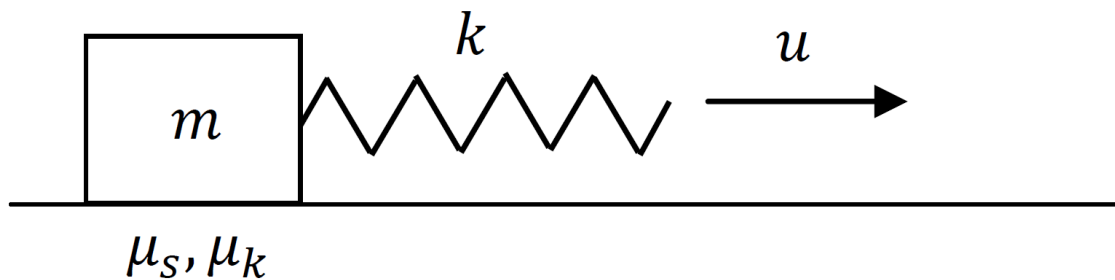


Рис. 1. Простейшая модель для изучения скрипа

Эта простейшая модель допускает два различных режима движения:

1. Движение всегда сопровождается проскальзыванием. Назовем этот режим чистым скольжением.
2. Движение, при котором происходит поочередная смена проскальзывания и покоя относительно поверхности. Это явление назовем прерывистым скольжением. Такое прерывистое скольжение является источником скрипящего звука, с которым мы часто сталкиваемся в повседневной жизни.

Рассмотрите случай, когда в начальный момент времени,  $t = 0$ , тело тянут по полу со скоростью  $v_0$ , и сила упругости пружины уравнивается силой трения скольжения. Считайте, что  $0 < v_0 < u$ . При этом удлинение пружины будет периодически изменяться как функция времени  $t$ .

**A1** Найдите период  $T_0$  и амплитуду  $A$  этих колебаний.

**0.6**

**A2** Изобразите качественно график зависимости удлинения пружины от времени  $x(t)$  в интервале  $0 < t < 3T_0$ .

**0.4**

**A3** Рассмотрите другой случай, когда в начальный момент времени  $t = 0$  тело находится в покое, а начальное удлинение пружины  $x$ , точно такое же, как в пунктах **A1**–**A2**. Изобразите качественный график зависимости скорости тела от времени  $v(t)$  относительно поверхности в интервале  $0 < t < 3T$ , где  $T$  — новый период колебаний  $x(t)$ . Движение направо соответствует положительному знаку скорости  $v$ . Укажите на вашем графике приблизительное положение горизонтальной линии  $v = u$ .

**1.2**

**A4** Для начальных условий пункта **A3**, найдите среднее по времени значение удлинения пружины  $\bar{x}$  за один период колебаний.

**0.5**

**A5** Для условий пункта **A3**, найдите период  $T$  колебаний  $x(t)$ .

**2.4**

# Road to IPhO

Режим движения с прерывистым скольжением прекращается при достаточно больших значениях скорости  $u$ . Давайте рассмотрим один из возможных механизмов для объяснения этого явления.

**А6** Будем считать, что за каждый период колебаний  $T$  небольшое количество полной энергии колебаний рассеивается и переходит в тепло. Пусть  $\eta = |\Delta A/A|$  есть относительная потеря амплитуды за один период при движении в режиме прерывистого скольжения. Полагая  $\eta \ll 1$ , найдите критическую скорость  $u_c$ , по достижении которой движение с **прерывистым скольжением** становится невозможным. **2.4**

Затухание, рассмотренное в пункте **А6**, не надо учитывать во второй части этой задачи.

## Часть В. Дверь со скрипом (2.5 балла)

Дверная петля представляет собой полый, открытый металлический цилиндр радиуса  $r$ , высотой  $h$  и толщиной стенок  $\Delta r$ . Нижнее основание цилиндра находится на металлической опоре, прикрепленной к стене (область контакта — это кольцо радиуса  $r$  и толщиной  $\Delta r \ll r$ ); см. рис. 2. Коэффициенты трения скольжения и трения покоя между цилиндром и его опорой равны соответственно  $\mu_k$  и  $\mu_s$ , причем  $\mu_k < \mu_s$ . Верхнее основание цилиндра жестко прикреплено к двери, которая считается абсолютно твердым телом. Обычно дверь висит на двух или трех петлях, но ее вес падает только на одну петлю — ту, которая и будет скрипеть. Цилиндр этой петли давит на свою металлическую опору с силой, равной весу всей двери, масса которой  $M$ .

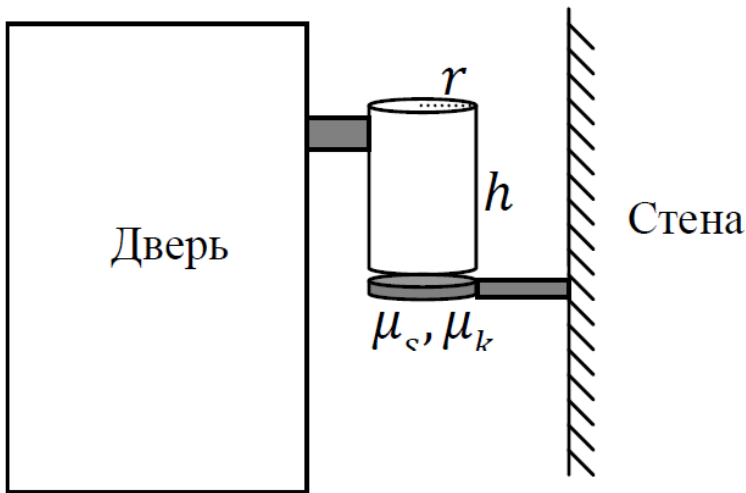


Рис. 2. Схематический рисунок двери

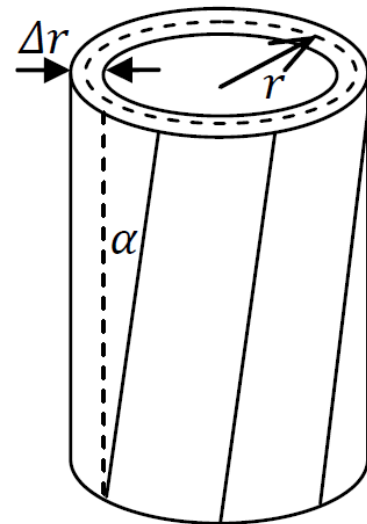


Рис. 3. Деформированный цилиндр

Цилиндр самой петли не является абсолютно твердым телом, он подвергается деформации сдвига без изменения своей формы, так что вертикальные линейные сегменты становятся наклонными с некоторым маленьким углом  $\alpha$  (см. рисунок 3). Сила упругости, действующая на элемент малой площади  $dS$  и обусловленная деформацией сдвига, определяется как:

$$dF = G\alpha dS,$$

где  $G$  — модуль сдвига (константа, характеризующая упругие свойства материала). Для расчетов используйте следующие значения  $r = 5$  мм,  $h = 3$  см,  $\Delta r = 1$  мм,  $\mu_s = 0.75$ ,  $\mu_k = 0.55$ ,  $G = 8 \cdot 10^{10}$  Па,  $M = 30$  кг,  $g = 9.8$  м/с<sup>2</sup>. Используйте приближение  $\Delta r \ll r$ .

**В1** Дверь начинают очень медленно поворачивать из состояния покоя. Для маленьких углов поворота двери, получите выражение для коэффициента кручения  $\kappa = \tau/\theta$ , где  $\tau$  — вращающий момент, необходимый для поворота двери на угол  $\theta$ . **1.0**

**В2** При вращении двери с малой угловой скоростью происходит переход к режиму прерывистого трения, сопровождающийся испусканием звукового импульса — скрипа. Найдите угловую скорость  $\Omega$  двери, при которой частота звука достигает слышимого диапазона с  $f = 20$  Гц. Считайте, что частота звуковых колебаний  $f_0$ , возбуждаемых в стержне при самом скольжении велика, так что  $f_0 \gg f$ . Получите аналитический и численный результаты. **1.5**