

Road to IPhO

Нецентральные движения шара (11 баллов)

В обычной жизни вы наверняка сталкивались с такими физическими ситуациями, как соударение катящегося шара с вертикальной стенкой, а также падение шара с края горизонтального стола. Также вами наверняка решались задачи, связанные с этими ситуациями, однако вы ограничивались случаями, когда шар катится в направлении, перпендикулярном плоскости стены либо краю стола.

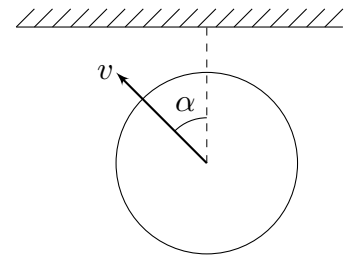
В рамках данной задачи вам предлагается получить обобщение результатов на случай, когда скорость центра шара направлена не перпендикулярно плоскости стены либо краю стола.

Во всех пунктах задачи считайте известным следующее:

1. Рассматриваемый шар массой m радиусом r является однородным.
2. Трение качения и трение верчения в рамках данной задачи можно не учитывать.
3. Ускорение свободного падения равняется g .

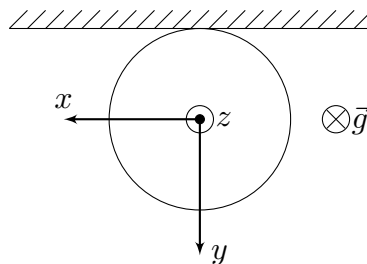
Часть А. Соударение шара с вертикальной стенкой (4.5 балла)

Данная часть задачи посвящена изучению столкновения шара с вертикальной стенкой. Шар катится по горизонтальному столу без проскальзывания, а его центр при этом движется со скоростью v в направлении, образующем угол α с нормалью к стенке. Шар не вращается вокруг вертикальной оси z .



В некоторый момент шар упруго сталкивается со стенкой. Коэффициент трения между шаром и стенкой равен μ .

Введём прямоугольную систему координат xyz с началом в центре шара в момент соударения так, как показано на рисунке.



Будем использовать следующие обозначения:

1. C – центр шара;
2. \vec{v}_C – скорость центра шара;
3. $\vec{\omega}$ – угловая скорость шара;
4. A – точка **шара**, контактирующая со стенкой (она является переменной), а \vec{v}_A – скорость данной точки;
5. $\vec{u}_A = v_{Ax}\vec{e}_x + v_{Az}\vec{e}_z$ и $\vec{u}_C = v_{Cx}\vec{e}_x + u_{Cz}\vec{e}_z$ – компоненты векторов скорости точек A и C соответственно, параллельные стенке;
6. \vec{r} – радиус-вектор, проведённый из центра шара C в точку A .

A1 Выразите компоненту скорости \vec{u}_A точки A через компоненту скорости \vec{u}_C центра шара, его угловую скорость $\vec{\omega}$, а также радиус-вектор \vec{r} в произвольный момент. **0.4**

Получите также производную по времени $\dot{\vec{u}}_A$ вектора \vec{u}_A . Ответ выразите через $\dot{\vec{u}}_C$, $\dot{\vec{\omega}}$ и \vec{r} .

A2 Определите силу трения \vec{F}_0 , действующую на шар в начальный момент контакта со стеной. Ответ выразите через \vec{e}_x , \vec{e}_z , α , μ и силу нормальной реакции стены N_0 в начальный момент. **0.6**

Road to IPhO

- A3** Докажите, что производная по времени $\dot{\vec{u}}_A$ компоненты скорости \vec{u}_A связана с силой трения \vec{F} соотношением: **1.0**

$$\dot{\vec{u}}_A = \frac{7\vec{F}}{2m}.$$

Данный факт можно использовать далее, даже если вы не смогли его доказать.

- A4** Определите компоненту скорости \vec{u}_{Ak} сразу после соударения, считая, что шар проскальзывает по стенке в течение всего времени соударения. Ответ выразите через $v, \alpha, \mu, \vec{e}_x$ и \vec{e}_z . **0.5**

При каком максимальном значении коэффициента трения μ_{\max} проскальзывание не прекращается в течение всего времени соударения? Ответ выразите через α .

- A5** При $\mu < \mu_{\max}$ определите скорость центра шара \vec{v}_{Ck} , а также под каким углом β к горизонту она направлена сразу после соударения. Ответы выразите через $v, \alpha, \mu, \vec{e}_x, \vec{e}_y$ и \vec{e}_z . **0.6**

- A6** При $\mu < \mu_{\max}$ определите координаты x_C, y_C центра шара в момент его падения на стол. Ответы выразите через v, g, μ и α . **0.4**

- A7** При произвольных значениях μ определите количество теплоты Q , выделившееся в процессе соударения шара со стенкой. Ответ выразите через m, v, μ и α . **1.0**

Примечание: явное вычисление работы силы трения существенно упростит решение задачи.

Далее в рамках данной задачи вам предлагается изучить динамику падения однородного шара с прямолинейного края горизонтального стола. Перед тем, как попасть на край, центр шара двигался по столу со скоростью v под углом α к перпендикуляру, проведённому к краю стола в его плоскости. До попадания на край стола шар не вращался вокруг вертикальной оси. При дальнейшем решении задачи считайте, что шар никогда не проскальзывает по столу.

Решение задачи наиболее удобно провести в цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Ось z совпадает с краем стола.

На рисунке приведены единичные орты $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ и \vec{e}_z цилиндрической системы координат. Радиус r шара является расстоянием от его центра до оси z , а угол φ является углом поворота линии, соединяющей центр шара с точкой его контакта со столом и отсчитывается от положения, в котором эта линия вертикальна.

Произвольный вектор в цилиндрической системе координат можно представить в следующей форме:

$$\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z.$$

При дифференцировании вектора, заданного компонентами в цилиндрической системе координат, необходимо учитывать, что единичные орты цилиндрической системы координат являются переменными. Для их производных по времени можно записать:

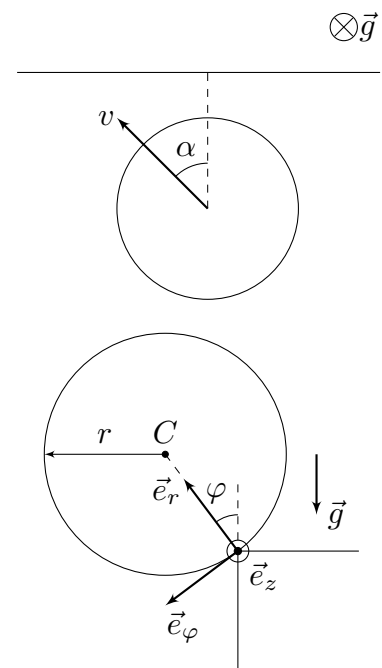
$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = [\vec{\Omega} \times \vec{e}_i],$$

где $\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z$ – угловая скорость вращения цилиндрической системы координат.

Таким образом, проекции производной по времени вектора \vec{A} записываются следующим образом:

$$(\dot{\vec{A}})_r = \dot{A}_r - \dot{\varphi} A_\varphi \quad (\dot{\vec{A}})_\varphi = \dot{A}_\varphi + \dot{\varphi} A_r \quad (\dot{\vec{A}})_z = \dot{A}_z$$

Данные соотношения могут оказаться полезными в процессе дальнейшего решения задачи.



Road to IPhO

Часть В. Уравнения кинематических связей (0.9 балла)

Данная часть посвящена получению основных кинематических уравнений, описывающих движение шара.

B1 Определите компоненты вектора скорости центра шара v_φ и v_z в цилиндрической системе координат. Ответы выразите через r , $\dot{\varphi}$ и \dot{z} . **0.2**

B2 Определите компоненты вектора ускорения центра шара a_r , a_φ и a_z в цилиндрической системе координат. Ответы выразите через r , v_φ , \dot{v}_φ и \dot{v}_z . **0.3**

B3 Из условия отсутствия проскальзывания определите компоненты угловой скорости шара ω_φ и ω_z в цилиндрической системе координат. Ответы выразите через r , v_φ и v_z . **0.4**

Часть С. Движение в плоскости, перпендикулярной краю стола (2.0 балла)

В плоскости, перпендикулярной краю стола, шар движется по окружности, что очень упрощает анализ данной части его движения.

C1 Определите компоненту силу трения $F_\varphi(\varphi)$, действующую на шар, а также компоненту ускорения $a_\varphi(\varphi)$ его центра. Ответы выразите через массу шара m , g и φ . **0.8**

C2 Получите зависимость $v_\varphi(\varphi)$. Ответ выразите через v , g , r , α и φ . **0.5**

C3 При каком условии шар не отрывается от стола в момент, когда нижняя точка шара достигает его края? Запишите это условие через v , g , r и α . Во всех дальнейших пунктах считайте, что это условие выполняется. **0.2**

C4 Определите угол φ_1 в момент отрыва шара от стола. Ответ выразите через v , g , r и α . **0.5**

Часть D. Движение шара вдоль оси z (3.6 балла)

В данной части задачи вам предлагается проанализировать зависимости от угла φ компоненты скорости центра шара v_z , а также его угловой скорости вращения ω_r .

D1 Выразите кинетическую энергию шара E_k через m , v_φ , v_z , ω_r и r . **0.5**

D2 Запишите для шара закон сохранения механической энергии. Комбинируя его с результатом пункта C2, покажите, что величины ω_r и v_z связаны соотношением:

$$1 = \frac{\omega_r^2}{A^2} + \frac{v_z^2}{B^2},$$

где $A, B > 0$ – постоянные коэффициенты. Определите A и B . Ответы выразите через v , r и α .

Решение данной задачи осложняется тем, что компонента угловой скорости ω_r не может быть получена исключительно из уравнения кинематической связи, однако можно получить выражение для её производной по времени $\dot{\omega}_r$.

D3 Вектор углового ускорения $\vec{\epsilon}$ шара может быть представлен в виде: **0.5**

$$\vec{\epsilon} = \epsilon_r \vec{e}_r + \epsilon_\varphi \vec{e}_\varphi + \epsilon_z \vec{e}_z.$$

Используя уравнение динамики вращательного движения относительно центра шара, покажите, что $\epsilon_r = 0$. Используя полученное равенство, выразите $\dot{\omega}_r$ через $\dot{\varphi}$, v_z и r .

Road to IPhO

D4 Комбинируя результаты пунктов **D2** и **D3**, получите зависимости $\omega_r(\varphi)$ и $v_z(\varphi)$. Ответы выразите через v , α , r и φ . **1.2**

D5 Рассмотрим предельный переход, когда угол $\alpha \rightarrow \pi/2$, т.е движение шара до контакта с краем стола происходит практически параллельно ему. **0.8**

Определите проекцию скорости v_z центра шара, а также проекцию его угловой скорости ω_y на ось y , направленную вертикально вниз, в момент отрыва шара от стола. Ответы выразите через v и r . Все численные коэффициенты в ответе должны быть аналитическими, а не приближёнными!