

# Road to IPhO

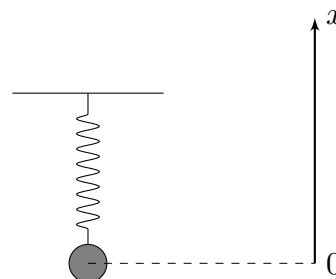
## Проводники в магнитном поле

Если проводник находится в переменном магнитном поле, либо движется в неоднородном магнитном поле — в нём возникает электрический ток. Возникновение электрического тока в проводниках является следствием явления электромагнитной индукции и достаточно хорошо изучено. В частности, эффект возникновения электрического тока в проводниках приводит к эффекту так называемого «магнитного торможения», который многим из вас наверняка приходилось наблюдать вживую. В данной задаче изучаются колебания проводящих тел с учётом влияния магнитного поля. Мы изучим два предельных перехода, соответствующие проводящим телам:

1. Удельное сопротивление  $\rho$  проводника настолько велико, что явлением самоиндукции можно пренебречь при определении токов Фуко, возникающих в проводнике. Данному предельному переходу посвящены части *A*, *B* и *C* данной задачи.
2. Удельное сопротивление  $\rho$  проводника настолько мало, что его можно принять равным нулю, а силовые линии индукции магнитного поля можно считать «вмороженными» в проводящее тело. Данному предельному переходу посвящена часть *D* данной задачи, в описании которой эффект вмороженности силовых линий индукции магнитного поля в проводник будет описан детально.

### Часть А. Свободные колебания с затуханием (1.2 балла)

Рассмотрим вертикальный пружинный маятник, состоящий из невесомой пружины с коэффициентом жёсткости  $k$ , один конец которой закреплён, а к другому концу прикреплён груз массой  $m$ . При движении со скоростью  $\vec{v}$  на него действует сила сопротивления  $\vec{F}_c = -\beta\vec{v}$ , где  $\beta$  — известная постоянная величина. Введём ось  $x$ , направленную вдоль пружины так, что при увеличении координаты  $x$  груза длина пружины уменьшается, а в положении равновесия координата груза  $x_0 = 0$ . Во всех пунктах частей А-С шар перемещается только по вертикали. Также введём обозначения:



$$\gamma = \frac{\beta}{2m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \gamma < \omega_0.$$

**A1** Пусть момент времени  $t_0 = 0$  груз находится в начале координат, а проекция его скорости на ось  $x$  равна  $v_0$ . Определите зависимости координаты  $x(t)$  и скорости  $v_x(t)$  груза от времени  $t$ . Ответ выразите через  $v_0$ ,  $\gamma$ ,  $\omega_0$  и  $t$ . **0.6**

Пусть  $E_0$  — кинетическая энергия груза при прохождении начала координат, а  $E_1$  — кинетическая энергия груза при последующем прохождении начала координат с тем же направлением скорости. Определим добротность  $Q$  колебательной системы следующим образом:

$$Q = \frac{2\pi E_0}{E_0 - E_1}.$$

**A2** Получите точное выражение для  $Q$ . Ответ выразите через  $\omega_0$  и  $\gamma$ . **0.4**

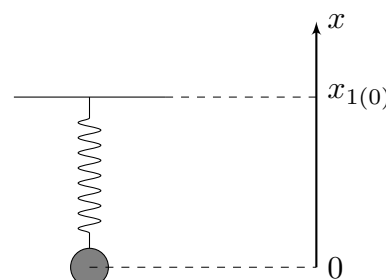
**A3** Получите приближённое выражение для добротности  $Q$  при слабом затухании ( $\gamma \ll \omega_0$ ). Ответ выразите через  $m$ ,  $k$  и  $\beta$ . **0.2**

### Часть В. Вынужденные колебания (1.2 балла)

Рассмотрим пружинный маятник из части А задачи. Координата  $x_1$  второго конца пружины (к которому не прикреплён груза) изменяется по следующему закону:

$$x_1(t) = x_{1(0)} + A_0 \sin \Omega t,$$

где  $A_0 > 0$ , а  $x_{1(0)}$  соответствует состоянию покоя груза. Далее рассматривайте только установившийся режим движения под действием вынуждающей силы. Используйте введённые ранее величины  $\omega_0$  и  $\gamma$ .



# Road to IPhO

**B1** Отклонение  $x$  груза от положения зависит от времени  $t$  следующим образом:

**0.6**

$$x(t) = A \sin(\Omega t + \varphi_0)$$

Найдите  $A$  и  $\varphi_0$ . Ответы выразите через  $A_0$ ,  $\Omega$ ,  $\omega_0$  и  $\gamma$ .

Будем называть резонансной такую циклическую частоту колебаний  $\Omega_{\text{рез}}$ , при которой амплитуда колебаний системы максимальна и обозначается как  $A_{\text{рез}}$ .

**B2** Получите точные выражения для резонансной циклической частоты  $\Omega_{\text{рез}}$  и соответствующей ей амплитуды колебаний  $A_{\text{рез}}$ . Ответы выразите через  $\omega_0$ ,  $\gamma$  и  $A_0$ . Считайте, что  $\gamma\sqrt{2} < \omega_0$ . **0.3**

Шириной резонансной кривой  $\Delta\omega$  называется разность максимальной и минимальной циклических частот  $\Omega_{\text{max}}$  и  $\Omega_{\text{min}}$  соответственно, при которых амплитуда колебаний меньше резонансной в  $\sqrt{2}$  раз.

**B3** Получите приближённые выражения для  $\Omega_{\text{рез}}$ ,  $A_{\text{рез}}$  и  $\Delta\omega$  при слабом затухании ( $\gamma \ll \omega_0$ ). Ответы выразите через  $A_0$ ,  $\omega_0$  и  $\gamma$ . **0.3**

## Часть С. Влияние поля кольца на движение шара (4.2 балла)

Сплошной однородный шар массой  $m$  и радиусом  $R_0$  изготовлен из материала с большим удельным сопротивлением  $\rho$ . Его центр может перемещаться вдоль оси вращения кольца радиусом  $R$ , плоскость которого горизонтальна. Силу тока в кольце медленно увеличивают до  $I$  и далее поддерживают постоянной. Для определения положения центра шара введём ось  $x$  с началом в центре кольца, направленную вверх. Считайте, что диэлектрическая и магнитная проницаемости шара  $\varepsilon$  и  $\mu$  соответственно равны единице, а радиус шара  $R_0$  удовлетворяет условиям:

$$R_0 \ll R, x.$$

Из общефизических соображений ясно, что при движении шара со скоростью  $\vec{v}$  вдоль оси вращения кольца действующая на него со стороны кольца сила имеет вид:

$$\vec{F} = -\beta(x)\vec{v},$$

где  $\beta(x)$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от координаты  $x$  центра шара.

Начнём с изучения магнитного поля кольца.

**C1** Найдите индукцию  $B_x$  магнитного поля кольца на его оси в точке с координатой  $x$ . Ответ выразите через  $x$ ,  $R$ ,  $I$  и магнитную постоянную  $\mu_0$ . **0.3**

Рассмотрим исходный шар радиусом  $R_0$  с удельным сопротивлением  $\rho$ , находящийся в однородном магнитном поле  $\vec{B} = \vec{e}_x B$ . Не изменяя направления, величину магнитного поля изменяют со скоростью  $dB/dt = \dot{B}$ . Выделим в шаре диск радиусом  $r_0$  и толщиной  $h \ll r_0$ , основания которого перпендикулярны оси  $x$ .

**C2** Определите магнитный момент  $\vec{m}$  диска. Ответ выразите через  $\vec{e}_x$ ,  $r_0$ ,  $h$ ,  $\rho$  и  $\dot{B}$ . **1.0**

**C3** Определите магнитный момент  $\vec{m}$  шара. Ответ выразите через  $\vec{e}_x$ ,  $R_0$ ,  $\rho$  и  $\dot{B}$ . **0.5**

Теперь рассмотрим движение шара вдоль оси кольца со скоростью  $v_x$ .

**C4** Получите производную по времени индукции магнитного поля кольца в центре шара  $dB_x/dt$ , эквивалентную величине  $\dot{B}$ . Ответ выразите через  $v$ ,  $I$ ,  $R$ ,  $x$  и магнитную постоянную  $\mu_0$ . **0.4**

**C5** Найдите коэффициент пропорциональности  $\beta(x)$ . Ответ выразите через  $I$ ,  $R$ ,  $x$ ,  $R_0$ ,  $\rho$  и магнитную постоянную  $\mu_0$ . **0.5**

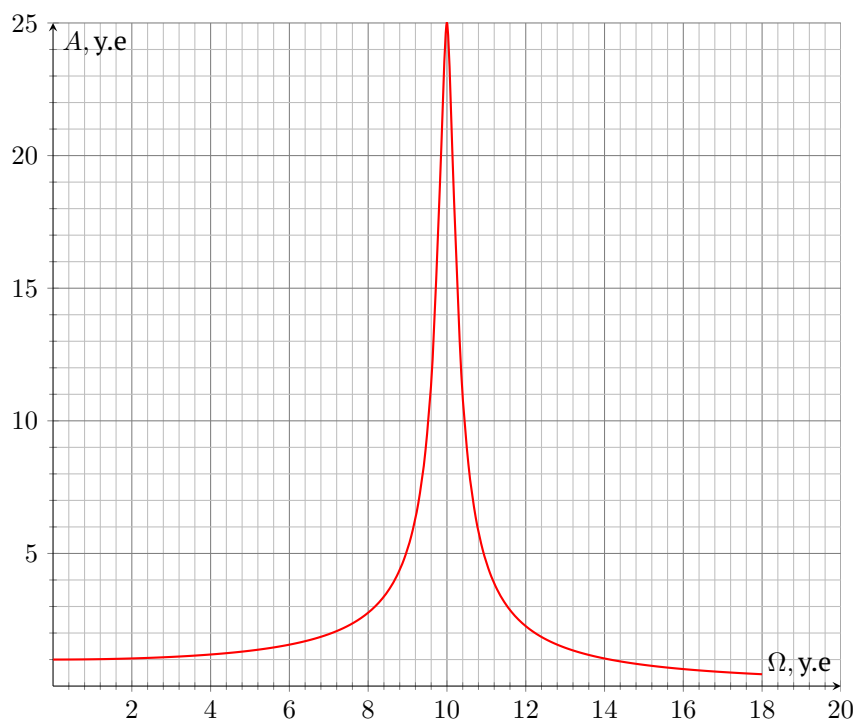
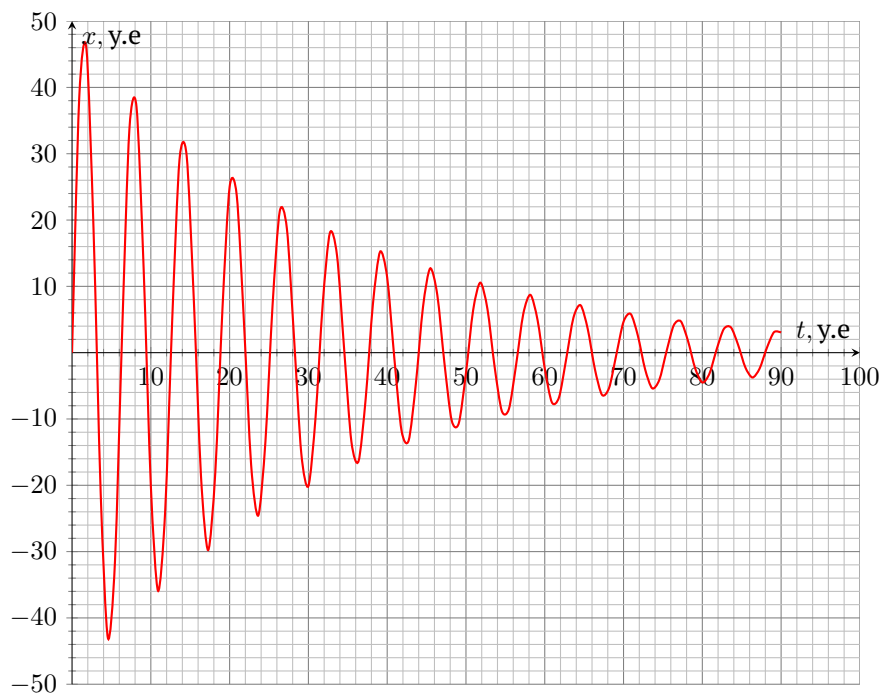
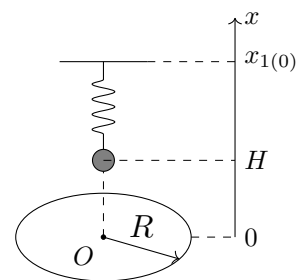
Воспользуемся полученным результатом для  $\beta(x)$  при определении удельного сопротивления шара по свободным колебаниям, а также по амплитудно-частотной характеристике вынужденных колебаний. Шар закрепили на одном из концов невесомой непроводящей пружины с коэффициентом жёсткости  $k$ . Другой конец пружины закреплён в точке с координатой  $x_{1(0)}$ . В положении равновесия центр шара расположен на высоте  $H \gg R_0$  над центром кольца. Отклонение центра шара  $\Delta x$  от положения равновесия всегда удовлетворяет условию:

$$\Delta x \ll R, H.$$

# Road to IPhO

На первом графике представлена зависимость отклонения шара от положения равновесия при собственных колебаниях в некоторых условных единицах. Второй конец пружины при этом неподвижен. На втором графике представлена зависимость амплитуды вынужденных колебаний  $A$  от частоты  $\Omega$  в некоторых условных единицах. Координата второго конца пружины начинает изменяться по закону:

$$x_1(t) = x_{1(0)} + A_0 \sin \Omega t.$$



# Road to IPhO

**C6** Определите удельное сопротивление  $\rho$  шара, используемого в первом эксперименте. Ответ выразите через  $m, k, R_0, R, H, I$  и магнитную постоянную  $\mu_0$ . **0.8**

**C7** Определите удельное сопротивление  $\rho$  шара, используемого во втором эксперименте. Ответ выразите через  $m, k, R_0, R, H, I$  и магнитную постоянную  $\mu_0$ . **0.7**

## Часть D. «Вмороженность» магнитного поля (3.4 балла)

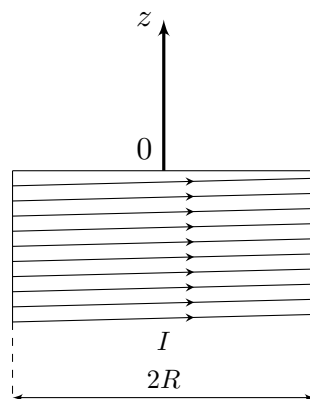
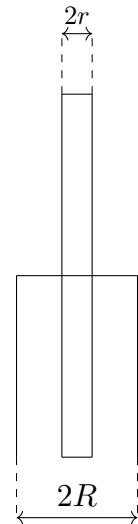
Данная часть задачи посвящена изучению магнитного поля, возникающего в результате перемещения очень хороших проводников в них.

Рассмотрим следующую конструкцию: Соосно полубесконечному круговому соленоиду радиусом  $R$  с плотностью намотки витков  $n$  и силой тока  $I$  в них расположен очень длинный хорошо проводящий цилиндр массой  $m$  радиусом  $r \ll R$ , концы которого расположены по разные стороны от основания соленоида и удалены от него на расстояния, во много раз превышающие его радиус. В изначальном положении цилиндра токи в нём отсутствуют. Из-за высокой проводимости вещества силовые линии индукции магнитного поля оказываются в него вморожены. Это означает, что при перемещении вещества силовые линии индукции магнитного поля будут перемещаться вместе с ним. В данном случае, соответствующем твёрдому телу, это приводит к тому, что индукция магнитного поля в каждой точке цилиндра будет сохраняться при его перемещении, что обусловлено возникновением в стержне круговых токов Фуко.

Решайте задачу в следующих приближениях:

- Возникающие в цилиндре токи текут только по его поверхности;
- Вне цилиндра индукция магнитного поля равна индукции магнитного поля соленоида;
- Цилиндр отклоняется от изначального положения на величину  $x \ll R$ ;
- Взаимодействием цилиндра с подводящими проводами можно пренебречь;
- За времена, рассматриваемые в данной задаче, затуханием токов в цилиндре можно пренебречь.

Индукцию магнитного поля соленоида будем характеризовать осью  $z$ , направленную наружу соленоида вдоль его оси. Начало оси  $z$  совпадает с центром основания соленоида.



**D1** Определите индукцию  $B_z$  магнитного поля соленоида, а также её производную  $dB_z/dz$  в точке с координатой  $z$ . Ответ выразите через  $\mu_0, n, I, R$  и  $z$ . **0.6**

Пусть цилиндр отклоняют на величину  $x \ll R$  вдоль оси  $z$  от изначального положения.

**D2** Определите линейную плотность тока  $i$  на поверхности цилиндра в точке с координатой  $z$ . Ответ выразите через  $\mu_0, x$  и  $dB_z(z)/dz$ . **1.0**

# Road to IPhO

**D3** Определите силу  $F_x$ , действующую на цилиндр со стороны магнитного поля соленоида. Ответ выразите через  $\mu_0$ ,  $r$ ,  $R$ ,  $n$ ,  $I$  и  $x$ . **1.5**

Пусть в изначальном положении цилиндру сообщили скорость  $v_0$ , направленную вдоль оси  $z$ .

**D4** Получите зависимость перемещения стержня  $x$  от времени  $t$ . Ответ выразите через  $\mu_0$ ,  $r$ ,  $R$ ,  $n$ ,  $I$  и  $m$ . **0.3**