Физика спина

Все вещества во Вселенной обладают, помимо массы и заряда, такой фундаментальной характеристикой, как спин. Спин – это внутренний момент количества движения, которым обладают частицы. Хотя для полного описания спина необходимо привлечение аппарата квантовой механики, физику спина можно понять, используя обычный классический формализм. В данной задаче изучается влияние магнитного поля на спин с использованием его классической аналогии.

Классическое уравнение моментов для спина выглядит так:

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mu} \times \vec{B}.$$

В этом уравнении момент импульса $\vec{L}$ представляет собой спин частицы, $\vec{\mu}$ – магнитный момент частицы, $\vec{B}$ – индукция магнитного поля. Спин частицы связан с ее магнитным моментом уравнением

$$\vec{\mu} = -\gamma \vec{L},$$

где γ – гиромагнитное отношение.

Часть A. Ларморовская прецессия (1.6 балла)

A1 Докажите, что величина магнитного момента μ под действием магнитного поля $\vec{B}$ всегда остается постоянной. Также покажите, что в частном случае постоянного магнитного поля угол между $\vec{\mu}$ и $\vec{B}$ постоянен. **0.8**

Подсказка: Вы можете использовать свойства векторных произведений.

A2 Индукция магнитного поля $\vec{B}$ образует угол ϕ с магнитным моментом частицы $\vec{\mu}$. Из-за момента сил, создаваемого магнитным полем, магнитный момент $\vec{\mu}$ вращается вокруг поля $\vec{B}$, что известно, как ларморовская прецессия. Определите частоту ω_0 ларморовской прецессии магнитного момента вокруг вектора $\vec{B} = B_0\vec{k}$, где $\vec{k}$ – единичный вектор. **0.8**

Часть B. Вращающаяся система координат (3.4 балла)

В данной части задачи выберем систему координат $S' = (x', y', z')$, которая вращается с угловой скоростью $\omega\vec{k}$, как это видно наблюдателю, находящемуся в лабораторной системе координат $S = (x, y, z)$, где оси x', y', z' совпадают с осями x, y, z в момент времени $t = 0$. Любой вектор $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ в лабораторной системе координат может быть представлен во вращающейся системе координат S' как $\vec{A} = A'_x\vec{i}' + A'_y\vec{j}' + A'_z\vec{k}'$. Производная этого вектора по времени

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}A'_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}' + \frac{\mathrm{d}A'_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}' + \frac{\mathrm{d}A'_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}'\right) + \left(A'_x\frac{\mathrm{d}\vec{i}'}{\mathrm{d}t} + A'_y\frac{\mathrm{d}\vec{j}'}{\mathrm{d}t} + A'_z\frac{\mathrm{d}\vec{k}'}{\mathrm{d}t}\right), \quad \left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{lab}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rot}} + \left(\omega\vec{k} \times \vec{A}\right),$$

где $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{lab}}$ – производная по времени вектора $\vec{A}$ в лабораторной системе координат и $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rot}}$ – производная этого вектора по времени во вращающейся системе координат.

Для всех вопросов из данной части, ответы относятся к вращающейся системе координат S'.

B1 Покажите, что изменение магнитного момента со временем описывается уравнением **0.8**

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{\mu}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rot}} = \left(\gamma\vec{\mu} \times \vec{B}_{\mathrm{eff}}\right),$$

где $\vec{B}_{\mathrm{eff}} = \vec{B} - \frac{\omega}{\gamma}\vec{k}'$ – эффективная индукция магнитного поля.

B2 Чему равна новая частота прецессии Δ, выраженная через ω_0 и ω, для $\vec{B} = B_0\vec{k}$? **0.4**

B3 Теперь рассмотрим случай магнитного поля, изменяющегося со временем. Для этого помимо постоянного магнитного поля мы также приложим вращающееся магнитное поле $\vec{b}(t) = b(\vec{i}\cos\omega t + \vec{j}\sin\omega t)$, так что $\vec{B} = B_0\vec{k} + \vec{b}(t)$. Покажите, что новая ларморовская частота прецессии магнитного момента равна **1.2**

$$\Omega = \gamma\sqrt{\left(B_0 - \frac{\omega}{\gamma}\right)^2 + b^2}.$$

B4 Вместо того, чтобы прикладывать поле $\vec{b}(t) = b(\vec{i}\cos\omega t + \vec{j}\sin\omega t)$ теперь приложим поле $\vec{b}(t) = b(\vec{i}\cos\omega t - \vec{j}\sin\omega t)$ которое вращается в противоположном направлении. В этом случае **1.0**

$$\vec{B} = B_0\vec{k} + b(\vec{i}\cos\omega t - \vec{j}\sin\omega t).$$

Чему теперь равно эффективное магнитное поле $\vec{B}_{\text{eff}}$ (выраженное через единичные вектора $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$)? Чему равно среднее по времени поле $\overline{\vec{B}_{\text{eff}}}$, (вспомните, что $\overline{\cos 2\pi t/T} = \overline{\sin 2\pi t/T} = 0$)?

Часть C. Осцилляции Раби (3.0 балла)

Для ансамбля из N частиц, находящегося под действием сильного магнитного поля, спин может иметь два квантовых состояния: «вверх» и «вниз». Следовательно, полная заселенность состояний «спин вверх» $N_\uparrow$ и «спин вниз» $N_\downarrow$ описывается уравнением

$$N_\uparrow + N_\downarrow = N.$$

Разность заселенностей состояний «спин вверх» и «спин вниз» приводит к макроскопическому намагничиванию вдоль оси:

$$M = (N_\uparrow - N_\downarrow)\mu = N\mu_z.$$

В реальном эксперименте обычно используются два магнитных поля: сильное смещающее магнитное поле $B_0\vec{k}$ и поле, колеблющееся с амплитудой $2b$ и перпендикулярное смещающему полю ($b \ll B_0$). Изначально прилагается только сильное смещающее поле, вынуждающее все частицы перейти в состояние «спин вверх» (при $t = 0$ вектор μ ориентирован в направлении z). Затем включается поле, колеблющееся с частотой ларморовской прецессии ω_0, т.е. $\omega = \omega_0$. Другими словами, после момента времени $t = 0$ суммарное поле описывается уравнением

$$\vec{B}(t) = B_0\vec{k} + 2b\vec{i}\cos\omega t.$$

C1 Покажите, что во вращающейся системе координат S' эффективное поле может быть аппроксимировано как **1.2**

$$\vec{B}_{\text{eff}} \approx b\vec{i}',$$

что известно как аппроксимация вращающейся волной. Чему равна частота прецессии Ω в системе координат S'?

C2 Определите угол α, который вектор $\vec{\mu}$ образует с полем $\vec{B}_{\text{eff}}$. Также докажите, что намагниченность изменяется со временем как **0.6**

$$M(t) = N\mu(\cos\Omega t).$$

C3 При воздействии магнитного поля, описанного выше, определите относительную заселенность состояний «спин вверх» $P_\uparrow = N_\uparrow/N$ и «спин вниз» $P_\downarrow = N_\downarrow/N$ как функции времени. Нанесите на один график $P_\uparrow$ и $P_\downarrow$ в зависимости от времени t. Изменяющаяся со временем заселенность состояний «спин вверх» и «спин вниз» называется осцилляциями Раби. **1.2**

Часть D. Несовместимость измерений (2.0 баллов)

Спин является векторной величиной. Из-за его квантовых свойств мы не можем измерить все его компоненты одновременно (т.е. мы можем знать $|\vec{\mu}|$ и μ_z, как в случаях, приведенных выше; но не можем знать одновременно $|\vec{\mu}|$, μ_x, μ_y и μ_z). В данной задаче мы произведем вычисления на основе принципа неопределенности Гейзенберга (используя соотношение $\Delta p_q \Delta q \geq \hbar$) для того, чтобы показать, как эти измерения несовместимы друг с другом.

D1 Рассмотрим горячий тигель – источник атомов серебра, имеющий небольшое отверстие. Атомы вылетают из отверстия вдоль направления «$-y$» (см. рисунок внизу) и попадают в неоднородное в пространстве поле $\vec{B}_1$. Поле $\vec{B}_1$ имеет сильную компоненту в направлении оси z. В нем атомы с различными магнитными моментами $\mu_z = \pm\gamma\hbar$ расщепляются вдоль направления z. На расстоянии D от тигля расположен экран SC_1, который пропускает только атомы со спином вверх (не пропускаются атомы со спином вниз). Поэтому сразу за экраном атомы имеют спин, направленный вверх. За экраном атомы входят в область неоднородного поля $\vec{B}_2$, где на них действует сила **1.0**

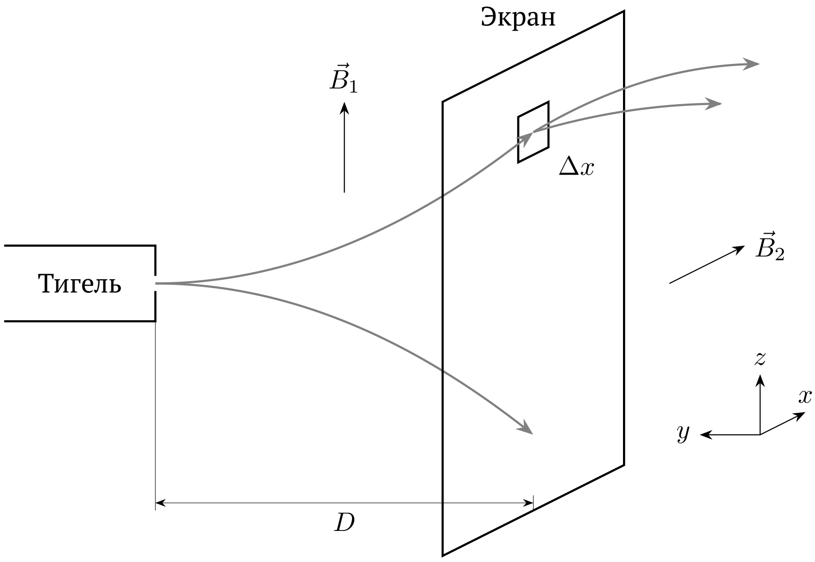
$$F_x = \mu_x C.$$

Поле $\vec{B}_2$ имеет сильную компоненту в направлении оси x, вдоль которой атомы имеют магнитные моменты $\mu_x = \pm\gamma\hbar$.

Покажите, что для того, чтобы определить μ_x, наблюдая расщепление в направлении оси x, должно выполняться следующее условие:

$$\frac{1}{\hbar}|\mu_x|\Delta x C t \gg 1,$$

где t – время после прохождения экрана SC_1 и Δx – расхождение пучков на экране SC_1 .



D2 Сразу после экрана атомы имеют спины, направленные вверх, где $\mu_z = \gamma\hbar = |\mu_x|$. Это означает, что атомы будут прецессировать с угловыми частотами, покрывающими диапазон значений $\Delta\omega$ по отношению к компоненте x поля $\vec{B}_2$, конкретно $B_{2x} = B_0 + Cx$. Докажите, что разброс угла прецессии $\Delta\omega t$ велик и мы не можем измерять одновременно μ_x и μ_z. Другими словами, измерение μ_x разрушает информацию о μ_z. **1.0**