

Road to IPhO

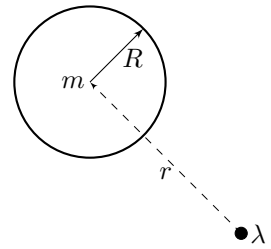
Движение металлического шара в поле провода (12 баллов)

В рамках данной задачи вам предстоит изучить взаимодействие незаряженного металлического однородного шара с бесконечно длинным тонким неподвижным проводом, заряженным равномерно по длине.

Во всех пунктах задачи радиус R и масса m шара, а также линейная плотность заряда провода λ считаются известными.

Части **A**, **B** и **C** посвящены изучению взаимодействия шара и провода на больших по сравнению с R расстояниях r между ними.

Части **D** и **E** посвящены точному описанию их взаимодействия.



Часть А. Взаимодействие шара с проводом на больших расстояниях (2.4 балла)

В данной части задачи вам предстоит получить зависимости силы F и потенциальной энергии W_p взаимодействия между шаром и проводом.

Примечание: во всех пунктах частей **A–C** считайте, что расстояние r между центром шара и проводом велико по сравнению с радиусом R шара.

Решим следующие вспомогательные задачи:

A1 Металлический шар радиуса R помещён в однородное электрическое поле \vec{E}_0 . **0.8**
Найдите приобретаемый шаром дипольный момент \vec{p} .
Ответ выразите через \vec{E}_0 , R и электрическую постоянную ϵ_0 .

A2 Пусть шар расположен в электрическом поле, направленном вдоль оси z , напряжённость которого меняется по закону: **0.5**
$$\vec{E} \approx (E_0 + kz) \vec{e}_z$$

где E_0 и k – известные величины, причём $kR \ll E_0$.
Найдите силу F_z , действующую на шар.
Ответ выразите через E_0 , k , R и электрическую постоянную ϵ_0 .

Перейдём к взаимодействию шара с проводом.

A3 Найдите величину электрического поля провода $E_{\text{п}}$ на расстоянии r от него. Ответ выразите через λ , r и **0.2**
электрическую постоянную ϵ_0 .

A4 Найдите величину и направление (притяжение или отталкивание) силы F , действующей на шар со стороны **0.5**
провода на расстоянии r от него. Ответ выразите через λ , R , r и электрическую постоянную ϵ_0 .

A5 Покажите, что механическая потенциальная энергия W_p шара в поле провода при расстоянии r между **0.4**
проводом и центром шара равна:

$$W_p = -\frac{A}{r^2}$$

Найдите A . Ответ выразите через λ , R и электрическую постоянную ϵ_0 .

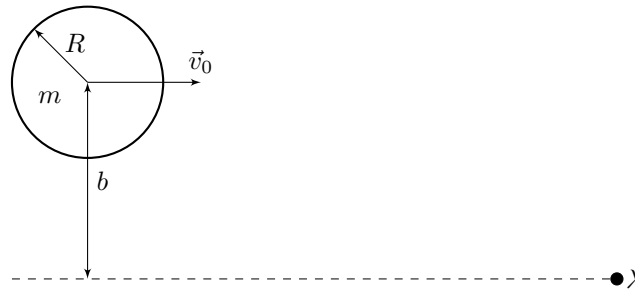
В дальнейшем во всех пунктах частей **B** и **C** используйте выражения для силы и потенциальной энергии взаимодействия шара с проводом, полученные в пунктах **A4** и **A5** соответственно.

Примечание: Выражение для величины A понадобится вам только в пункте **C4**.

Road to IPhO

Часть В. Условие отсутствия контакта (0.8 балла)

Шар летит по направлению «на провод» из бесконечности с начальной скоростью v_0 и прицельным параметром b .



В данной части задачи вам необходимо приближённо получить условия, при которых между шаром и проводом в дальнейшем не будет контакта.

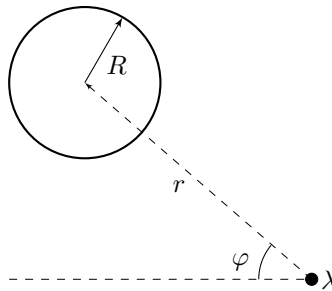
V1 Найдите минимальное расстояние r_{\min} между центром шара и проводом в процессе движения, считая, что столкновения не происходит. Ответ выразите через A , b , m и v_0 . **0.6**

При начальной скорости v_0 шара, меньшей критического значения v_{crit} , шар сталкивается с проводом.

V2 Найдите v_{crit} . Ответ выразите через A , b и m . **0.2**

Часть С. Траектория движения (2.5 балла)

Для описания траектории центра шара введём полярную систему координат (r, φ) с началом на оси провода. Угол φ будем отсчитывать от направления на бесконечность.



Также воспользуемся подстановкой Бине:

$$u = \frac{1}{r}$$

Обозначим $\frac{du}{d\varphi}$ за u' , а $\frac{dr}{dt}$ и $\frac{d\varphi}{dt}$ за \dot{r} и $\dot{\varphi}$ соответственно.

C1 Выразите u' через r , \dot{r} и $\dot{\varphi}$. **0.4**

Найдите $u'(0)$, соответствующую значению $\varphi = 0$.

C2 Выразите механическую энергию E шара через m , u , u' , v_0 , b и A . **0.3**

C3 Получите зависимость $u(\varphi)$. Ответ выразите через m , v_0 , b , A и φ . **0.7**

C4 В листе ответов качественно постройте траекторию центра шара в координатах u, φ . Координаты всех характерных точек могут быть выражены через m , v_0 , b и A . **0.6**

Road to IPhO

C5 Используя значение параметра A , найденное в пункте **A4**, найдите начальную скорость шара v_1 , при которой за время взаимодействия между ним и проводом направление скорости шара изменится на противоположное. **0.5**

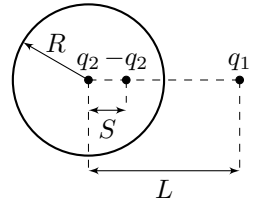
Ответ выразите через m, b, R, λ и электрическую постоянную ϵ_0 .

Уравнения, полученные в первых трёх частях задачи, применимы далеко не всегда, однако данная задача может быть решена и точно. Вопрос о траектории изучаться далее не будет, однако будут точно получены условия отсутствия контакта между шариком и проводом.

Часть D. Нахождение силы взаимодействия шарика с проводом методом изображений (3.5 балла)

Вновь решим вспомогательную задачу.

Рассмотрим точечный заряд q_1 , находящийся на расстоянии L от центра незаряженного металлического шара. Как известно, такая задача решается методом изображений: в центре шара и на некотором расстоянии $S < R$ необходимо расположить заряды q_2 и $-q_2$ соответственно, обеспечивающие постоянство потенциала на поверхности шара.



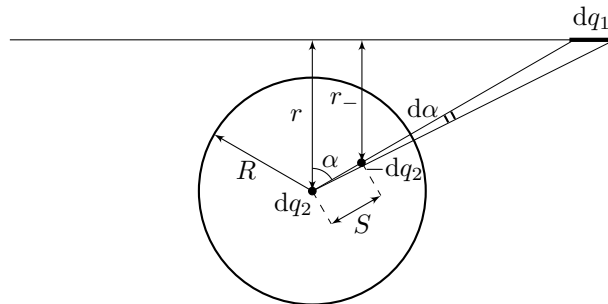
Примечание: вам может понадобиться следующая первообразная:

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{bx}{a} \right) + C$$

D1 Найдите S и q_2 . Ответы выразите через R, L и q . **0.6**

Перейдём к взаимодействию шарика с проводом. Центр незаряженного металлического шара радиуса R находится на расстоянии r от провода.

Проведём из центра шара две линии, составляющие углы α и $\alpha + d\alpha$ с направлением «на провод». Заряд элемента провода в области пересечения с линиями обозначим за dq_1 , заряды-изображения данного элемента – за dq_2 и $-dq_2$, а расстояния от заряда $-dq_2$ до центра шара и до провода – за S и r_- соответственно.



D2 Найдите dq_1, dq_2, S и r_- . **0.4**

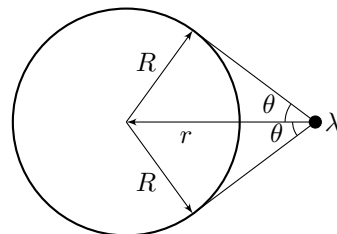
Ответы выразите через λ, R, r, α и $d\alpha$.

D3 Найдите величину и направление (притяжение или отталкивание) векторной суммы сил $d\vec{F} = d\vec{F}_+ + d\vec{F}_-$ взаимодействия зарядов dq_2 и $-dq_2$ с проводом. Ответ выразите через $\lambda, R, r, \alpha, d\alpha$ и электрическую постоянную ϵ_0 . **0.2**

Road to IPhO

Для описания силы и потенциальной энергии взаимодействия шарика с проводом удобно ввести угол θ , определяемый следующим образом (см. рис):

$$\theta = \arcsin\left(\frac{R}{r}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}}\right).$$



D4 Найдите величину и направление полной силы взаимодействия шара с проводом $F_{\text{полн}}$. **1.0**
Ответ выразите через λ , R , θ и электрическую постоянную ϵ_0 .

D5 Найдите потенциальную энергию W_p взаимодействия шарика с проводом. **1.0**
Ответ выразите через λ , R , θ и электрическую постоянную ϵ_0 .

D6 Какую скорость $v_{\text{ст}}$ будет иметь незаряженный металлический шар радиусом R и массой m при столкновении с проводом, если его из бесконечности отпустить без начальной скорости? **0.3**
Ответ выразите через λ , R , m и электрическую постоянную ϵ_0 .

Часть Е. Точные условия отсутствия контакта (2.8 балла)

Незаряженный металлический шар радиусом R и массой m налетает из бесконечности на провод со скоростью v_0 и прицельным параметром $b > R$.

В данной части задачи для разных соотношений b/R мы получим ограничения на скорость v_0 , при которых шар движется, не контактируя с проводом.

Минимально возможную скорость, при которой движение шара происходит без контакта с проводом, обозначим за v_{crit} .

Параметр θ в момент максимального сближения шара с проводом обозначим за θ_{max} .

E1 Для заданного значения v_0 получите зависимость квадрата радиальной компоненты скорости \dot{r}^2 от параметра θ . **0.4**
Ответ выразите через m , v_0 , λ , R , b , электрическую постоянную ϵ_0 и θ .

E2 Постройте качественные графики зависимости $\dot{r}^2(\theta)$ при разных значениях v_0 . **0.6**

E3 Считая все величины, кроме v_0 , постоянными, получите систему уравнений, позволяющую определить величину v_{crit} . **0.6**
В систему уравнений могут войти m , R , b , λ , электрическая постоянная ϵ_0 , θ_{max} и v_{crit} .

E4 Найдите $v_{\text{crit}1}$, $v_{\text{crit}2}$ и $v_{\text{crit}3}$, соответствующие следующим значениям b : **1.2**
$$b_1 = 20R, \quad b_2 = 3R, \quad b_3 = 1.1R$$

Ответы выразите через m , R , λ и электрическую постоянную ϵ_0 .