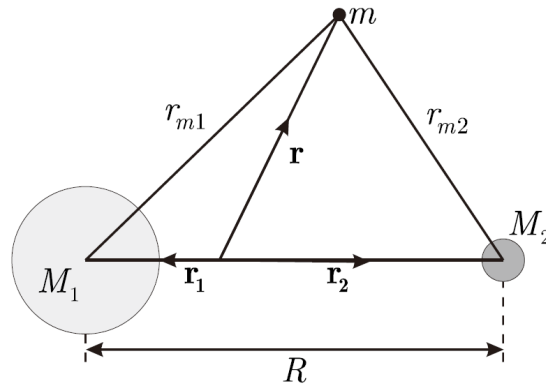


Road to IPhO

Устойчивость точек Лагранжа (12 баллов)

В системе отсчета, вращающейся вместе с Землей и Солнцем вокруг их общего центра масс, существуют пять точек равновесия. Эти точки называются точками Лагранжа (в честь Жозефа Луи Лагранжа, который первый изучал эту систему трех тел). Точно решить задачу нахождения и устойчивости этих точек довольно сложно, поэтому мы будем считать, что массы двух тел (M_1 и M_2) много больше массы третьего тела (m). Расстояние между телами масс M_1 и M_2 равно R .



Часть А. Основные уравнения (1.4 балла)

Обозначим радиус-векторы из центра масс к телам масс M_1 и M_2 через \vec{r}_1 и \vec{r}_2 соответственно, а до тела массы m – через \vec{r} .

A1 Найдите полную силу притяжения \vec{F}_g , действующую на m . Выразите ответ через m , M_1 , M_2 , \vec{r} , \vec{r}_1 , \vec{r}_2 и гравитационную постоянную G . **0.2**

A2 Считая, что $M_1, M_2 \gg m$, найдите угловую скорость Ω обращения M_1 и M_2 . Считайте, что M_1 и M_2 движутся по круговым орбитам. Выразите ответ через G , M_1 , M_2 и R . **0.2**

A3 В системе отсчета, вращающейся вместе с M_1 и M_2 , на тело m действуют сила инерции \vec{F}_Ω . Найдите \vec{F}_Ω . Ответ выразите через m , Ω , \vec{r} и скорость \vec{v} тела m во вращающейся системе отсчета. **0.2**

Введем систему координат следующим образом: начало расположим в центре масс M_1 и M_2 , ось x направим от M_1 к M_2 , ось z направим вдоль $\vec{\Omega}$, ось y – так, чтобы получилась правая система координат. В дальнейшем считайте, что скорость m вдоль оси z равна нулю, т.е. движение происходит в плоскости xy .

A4 Найдите полную силу \vec{F} , действующую на m . Выразите ответ через координаты x , y вектора \vec{r} , координаты v_x и v_y вектора \vec{v} , m , R , Ω и параметр $\alpha = \frac{M_2}{M_1 + M_2}$. **0.8**

Часть В. Нахождение точек Лагранжа (4.5 балла)

Во вращающейся системе отсчета есть пять точек, в которых полная сила равна нулю (при нулевой скорости). Три из них (обозначим их L_1 , L_2 и L_3) лежат на оси x , а оставшиеся две лежат в плоскости xy и симметричны относительно оси x (т.е. $x_5 = x_4$, $y_5 = -y_4$). В этой части скорость частицы равна нулю.

B1 В начале рассмотрим точки L_1 , L_2 и L_3 . Введем параметр ν – расстояние от M_1 до m , измеренное в единицах R : $x = (\nu - \alpha)R$. Найдите условие равновесия этих точек. Выразите ответ через ν и α . **0.3**

B2 Полученное уравнение приводит к трем случаям (соответствующим трем точкам L_1 , L_2 , L_3): $\nu < a$, $a < \nu < b$ и $b < \nu$. Найдите a и b . **0.2**

Далее (в пунктах **B3–B5**) будем считать, что параметр α мал (например, для системы Солнце-Земля $\alpha = 3.0 \cdot 10^{-6}$). В дальнейшем используйте наименьший неисчезающий порядок по α , пренебрегая членами высшего порядка. В следующих трех пунктах мы получим приближенные положения точек L_1 , L_2 и L_3 .

Road to IPhO

B3 В первом случае ($\nu < a$) положим $\nu = -1 + \delta_1$, где δ_1 – малый положительный параметр, зависящий от α . **0.3**
Значение ν определяет положение первой точки Лагранжа: $x = -R(1 + \xi_1)$. Выразите ξ_1 через α .

B4 Во втором случае ($a < \nu < b$) положим $\nu = 1 - \delta_2$, где δ_2 – малый положительный параметр, зависящий от α . **0.5**
Значение ν определяет положение второй точки Лагранжа: $x = R(1 - \xi_2)$. Выразите ξ_2 через α .

B5 В третьем случае ($b < \nu$) положим $\nu = 1 + \delta_3$, где δ_3 – малый положительный параметр, зависящий от α . **0.5**
Значение ν определяет положение третьей точки Лагранжа: $x = R(1 + \xi_3)$. Выразите ξ_3 через α .

Для нахождения четвертой и пятой точек Лагранжа разложим силу, действующую на m , на параллельную и перпендикулярную к \vec{r} компоненты.

B6 Найдите единичный вектор \vec{e}_{\parallel} , направленный вдоль \vec{r} . Также найдите единичный вектор \vec{e}_{\perp} , лежащий в плоскости xy и перпендикулярный к \vec{r} . Выразите ответ через x и y . **0.2**

B7 Найдите параллельную и перпендикулярную к \vec{r} компоненты полной силы, действующей на m , F_{\parallel} и F_{\perp} соответственно. Выразите ответ через x , y , m , R , Ω и α . Вы также можете использовать в ответе r_{m1} и r_{m2} – расстояния от точки m до M_1 и M_2 . **0.6**

B8 Из условия равновесия на F_{\perp} найдите связь между r_{m1} и r_{m2} . **0.2**

B9 Из условия равновесия на F_{\parallel} найдите связь между r_{m1} и R . **0.3**

B10 Определите положение четвертой и пятой точек Лагранжа, (x_4, y_4) и (x_5, y_5) соответственно. Для определенности считайте, что у четвертой точки Лагранжа ордината y положительна. **0.4**

Часть С. Устойчивость точек Лагранжа (7.1 балла)

Для изучения устойчивости точек Лагранжа немного отклоним частицу m от положения равновесия. Так как силы, действующие на частицу, зависят ее положения (x, y) и скорости (v_x, v_y) , при вычислении возвращающей силы нужно учитывать изменения положения и скорости частицы. Эти изменения малы, поэтому скорость можно приблизить следующим выражением:

$$F_x(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, v_{x,0} + \delta v_x, v_{y,0} + \delta v_y) = \frac{\partial F_x}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F_x}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F_x}{\partial v_x} \delta v_x + \frac{\partial F_x}{\partial v_y} \delta v_y,$$

$$F_y(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, v_{x,0} + \delta v_x, v_{y,0} + \delta v_y) = \frac{\partial F_y}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F_y}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F_y}{\partial v_x} \delta v_x + \frac{\partial F_y}{\partial v_y} \delta v_y,$$

где частные производные вычисляются в точке $(x_0, y_0, v_{x,0}, v_{y,0})$.

C1 Найдите $\frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial x}$, $\frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial y}$, $\frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial x}$ и $\frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial y}$ для произвольных x , y , v_x и v_y . Выразите ответ через x , y , v_x , v_y , m , R , Ω и α . Заметим, что $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$. **1.2**

C2 Найдите $\frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial v_x}$, $\frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial v_y}$, $\frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial v_x}$ и $\frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial v_y}$. Выразите ответ через x , y , v_x , v_y , m , R , Ω и α . Заметим, что эти четыре коэффициента одинаковы для всех пяти точек Лагранжа. **0.4**

Теперь мы готовы исследовать устойчивость точек Лагранжа. При изучении первых трех точек оставьте лишь наименьший порядок по α , пренебрегая высшими порядками.

Первая точка Лагранжа (1.8 балла)

C3 Покажите, что $\frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial x} = c_1 \Omega^2$. Найдите c_1 . **0.2**

Road to IPhO

C4 Покажите, что $\frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$. **0.1**

C5 Покажите, что $\frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial y} = c_2 \alpha \Omega^2$. Найдите c_2 . **0.3**

C6 Решение полученной линейной системы является суммой решений вида $\delta x = Ae^{\lambda t}$, $\delta y = Be^{\lambda t}$, где A и B не равны одновременно нулю в общем случае. Найдите уравнение на λ . Выразите ответ через α , Ω и λ . **0.5**

C7 Существует четыре решения для λ . Найдите λ . Определите устойчивость этой точки. **0.5**

C8 Для системы Солнце-Земля $\alpha = 3.0 \cdot 10^{-6}$ и $\Omega = 2\pi/\text{год}$. Если эта точка устойчива, найдите ее наименьший период колебаний (в днях), если же она неустойчива, найдите наименьшее $\frac{1}{\lambda}$ (тоже в днях). **0.2**

Вторая точка Лагранжа (1.7 балла)

C9 Покажите, что $\frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial x} = c_3 \Omega^2$. Найдите c_3 . **0.2**

C10 Покажите, что $\frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$. **0.1**

C11 Покажите, что $\frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial y} = c_4 \Omega^2$. Найдите c_4 . **0.2**

C12 Решение полученной линейной системы является суммой решений вида $\delta x = Ae^{\lambda t}$, $\delta y = Be^{\lambda t}$, где A и B не равны одновременно нулю в общем случае. Найдите уравнение на λ . Выразите ответ через α , Ω и λ . **0.5**

C13 Существует четыре решения для λ . Найдите λ . Определите устойчивость этой точки. **0.5**

C14 Для системы Солнце-Земля: если эта точка устойчива, найдите ее наименьший период колебаний (в днях), если же она неустойчива, найдите наименьшее $\frac{1}{\lambda}$ (тоже в днях). **0.2**

Третья точка Лагранжа похожа на вторую, поэтому ее рассматривать не будем.

Четвертая точка Лагранжа (2 балла)

Напомним, что в следующих пунктах α не обязательно мал.

C15 Покажите, что $\frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial x} = c_5 \Omega^2$. Найдите c_5 . **0.2**

C16 Покажите, что $\frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial y} = (c_6 + c_7 \alpha) \Omega^2$. Найдите c_6 и c_7 . **0.3**

C17 Покажите, что $\frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial y} = c_8 \Omega^2$. Найдите c_8 . **0.2**

C18 Решение полученной линейной системы является суммой решений вида $\delta x = Ae^{\lambda t}$, $\delta y = Be^{\lambda t}$, где A и B не равны одновременно нулю в общем случае. Найдите уравнение на λ . Выразите ответ через α , Ω и λ . **0.5**

C19 Определим $M_1/M_2 = \xi$. Найдите множество значений ξ , при котором четвертая точка Лагранжа устойчива. **0.8**

Пятая точка Лагранжа аналогична четвертой, поэтому ее рассматривать не будем.