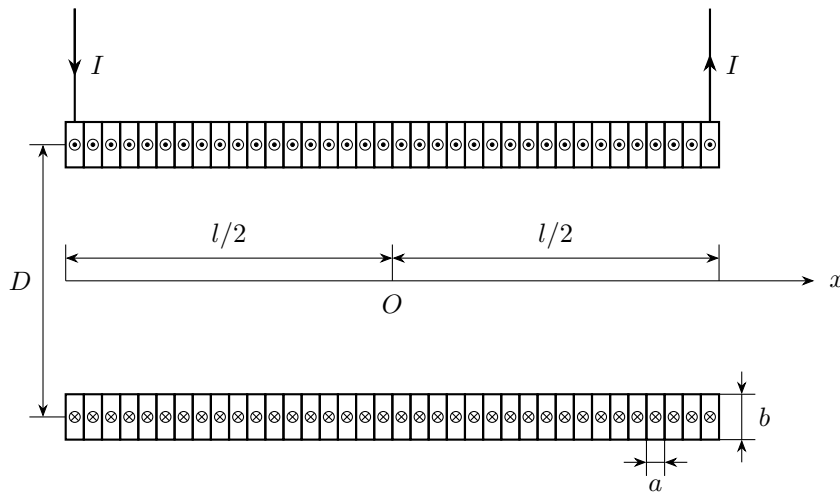


Road to IPhO

Электромагниты с большим сопротивлением

Электромагниты, имеющие сопротивление – это катушки, сделанные из обычного металла, такого как медь или алюминий. Современные электромагниты с большим сопротивлением могут создавать магнитное поле свыше чем 30 Тл. Катушки обычно изготавливаются складыванием сотни тонких круглых пластин, сделанных из медного листового металла с большим количеством охлаждающихся отверстий, отпечатанных в них; есть также изоляторы с тем же самым образом. Когда к катушке приложено напряжение, электрический ток, протекающий через пластины по винтовому пути, возбуждает сильное магнитное поле в центре электромагнита.

В этой задаче мы оценим, может ли цилиндрическая катушка (или соленоид) с большим количеством витков служить в качестве электромагнита, возбуждающего сильные магнитные поля. Как показано на рис., центр электромагнита расположен в точке O . Цилиндрическая катушка состоит из N витков медной проволоки, по которой течет ток I , равномерно распределенный по сечению провода. Средний диаметр катушки равен D , и ее длина вдоль оси x равна l . Поперечное сечение провода представляет собой прямоугольником с шириной a и высотой b . Витки катушки так плотно намотаны друг к другу, что они практически перпендикулярны оси x , и $l = Na$. В таблице приведены значения геометрических размеров катушки.



l , см	D , см	a , мм	b , мм
12.0	6.0	2.0	5.0

При оценке того, может ли электромагнит создавать сильные магнитные поля, нужно учесть два фактора: Первое – это механическая прочность катушки, подверженной воздействию силы Лоренца. И второе – это большое количество джоулевого тепла, выделяющегося в проводе и приводящее к увеличению его температуры. Мы изучим оба этих фактора, используя простые модели.

В приложении в конце задачи приведены некоторые полезные математические формулы и физические константы, которые Вы можете использовать при необходимости.

Часть А. Магнитное поле на оси катушки (1.4 балла)

Пусть $b \ll D$, так что провод можно рассматривать как тонкую полоску шириной a . Пусть O совпадает с началом координатной оси x . Направление текущего тока показано на рисунке.

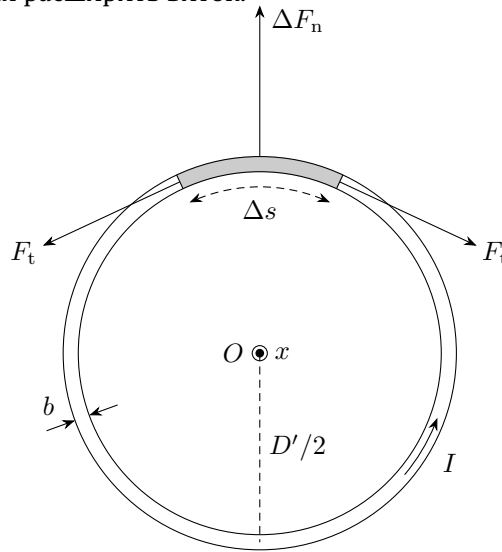
A1 Найдите x -компоненту $B(x)$ магнитного поля на оси катушки как функцию x , если через катушку течет постоянный ток I . **1.0**

A2 Найдите величину тока I_0 , проходящего через катушку, если $B(0)$ равно 10.0 Тл. Для вычисления используйте данные, приведенные в таблице. **0.4**

Road to IPhO

Часть В. Верхний предел тока (3 балла)

В части В мы предположим, что длина l катушки бесконечна и $b \ll D$. Рассмотрим виток катушки, расположенный вблизи точки $x = 0$. Магнитное поле действует с некоторой силой Лоренца на ток, проходящий через виток. На рисунке ниже показан сегмент окружности длины Δs , подверженный воздействию нормальной силы ΔF_n , стремящийся расширить виток.



В1 Предположим, что ток равен I , и средний диаметр катушки после расширения остается постоянным и равным D' (больше чем D), как показано на рис. Найдите направленную наружу нормальную силу на единицу длины $\Delta F_n / \Delta s$. **1.2**

В2 Найдите механическое напряжение F_t , действующее вдоль провода. **0.6**

В3 Пренебрегите ускорением катушки во время расширения. Предположим, что виток разрывается, когда относительное удлинение провода составляет 60%, и механическое напряжение (то есть сила на единицу поперечного сечения не натянутого провода) равна $\sigma_b = 455$ МПа. Пусть I_b – это ток, при котором виток разрывается, и B_b – соответствующая величина магнитного поля в центре O . Найдите выражение для I_b и вычислите его. **0.8**

В4 Найдите выражение для B_b и вычислите его. **0.4**

Часть С. Скорость повышения температуры (1 балл)

Пусть в катушке протекает ток I , равный 10.0 кА. Удельное сопротивление, удельная теплоемкость при постоянном давлении и плотность провода катушки равны соответственно $\rho_e = 1.72 \cdot 10^{-8}$ Ом \cdot м, $c_p = 3.85 \cdot 10^2$ Дж/(кг \cdot К) и $\rho_m = 8.98 \cdot 10^3$ кг \cdot м $^{-3}$.

С1 Найдите выражение для мощности тепла, выделяющегося в единице объема провода катушки, и вычислите ее. Используйте данные из таблицы. **0.5**

С2 Пусть \dot{T} – скорость изменения температуры проволоки в катушке. Найдите выражение для \dot{T} и вычислите ее. **0.5**

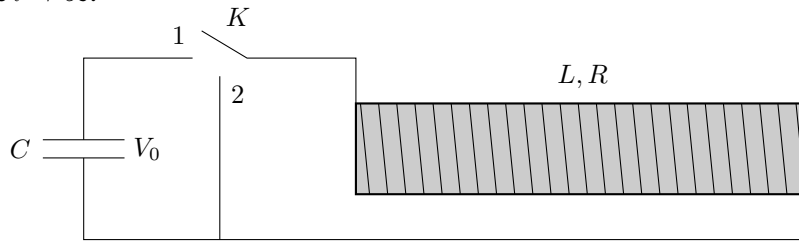
Часть D. Импульсный электромагнит (4.6 баллов)

Если большой электрический ток, используемый для создания магнитного поля, протекает за короткий период времени, то это позволяет значительно уменьшить повышение температуры проволоки, вызванное выделением джоулевой теплоты. Это идея используется в импульсных электромагнитах.

Как показано на рисунке ниже, конденсатор емкостью C , заряженный до напряжения V_0 , используется для создания тока I через катушку. Цепь снабжена переключателем K . Индуктивность L и сопротивление

Road to IPhO

R можно считать сосредоточенными только в катушке. Конструкция и размеры катушки – те же самые, как на первом рисунке. Пусть R , L , и C не зависят от температуры и магнитное поле соответствует бесконечному соленоиду с $l \rightarrow \infty$.



D1 Найдите выражение для индуктивности L и сопротивления R катушки. **0.6**

D2 Вычислите величины L и R . Используйте данные из таблицы во введении. **0.4**

В момент времени $t = 0$ переключатель K ставят в положение 1, и начинает течь электрический ток. В момент времени $t \geq 0$ электрический заряд $Q(t)$ положительной пластины конденсатора и электрический ток $I(t)$ задаются выражениями:

$$Q(t) = \frac{CV_0}{\sin \theta_0} e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \theta_0), \quad I(t) \equiv \frac{dQ}{dt} = \left(\frac{-\alpha}{\cos \theta_0} \right) \frac{CV_0}{\sin \theta_0} e^{-\alpha t} \sin \omega t,$$

в которых α и ω – это положительные константы, а θ_0 задается выражением:

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\omega}{\alpha}, 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Если $Q(t)$ выражена как функция от новой переменной $t' \equiv (t + \theta_0/\omega)$, тогда $Q(t')$ и ее производная по времени $I(t)$ идентичны с точностью до постоянного множителя. Таким образом, производная по времени $I(t)$ может быть найдена без дальнейшего дифференцирования.

D3 Выразите α и ω через R , L , и C . **0.8**

D4 Вычислите величины α и ω , когда C равна 10.0 мФ. **0.4**

D5 Пусть I_m – максимальная величина $|I(t)|$ при $t > 0$. Найдите выражение для I_m . **0.6**

D6 Пусть $C = 10.0$ мФ. Какова максимальная величина V_{0b} начального напряжения на конденсаторе V_0 , при котором ток I_m не превысит I_b , найденный в пункте **B3**? **0.4**

D7 Пусть теперь переключатель K мгновенно перевели из положения 1 в положение 2, когда абсолютная величина тока $|I(t)|$ достигла I_m . Обозначим через ΔE полное количество тепла, выделенного в катушке с момента времени $t = 0$ до ∞ , а через ΔT – соответствующее увеличение температуры проволоки. Пусть начальное напряжение V_0 равно максимальному значению V_{0b} , полученному в пункте **D6**, а потеря электромагнитной энергии происходит только за счет выделения тепла в катушке. Найдите выражение для ΔE и вычислите его. **1.0**

D8 Найдите выражение для ΔT и вычислите его. **0.4**

Приложение

- $$\int_0^l \frac{dx}{(D^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{D^2} \cdot \frac{L}{(D^2 + L^2)^{1/2}}$$

- $$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

- Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м