

Road to IPhO

Явление радуги

Радуга – это захватывающее оптическое явление дисперсии. Написано множество красивых сказок про радугу, но здесь вам предлагается рассмотреть радугу с точки зрения физики. Сразу после дождя в воздухе остаются множество мельчайших капелек воды. Если в это время из-за облаков появляется Солнце, то солнечный свет преломляется и отражается этими капельками воды. Капли воды в воздухе могут иметь разную форму, однако вклад в образование радуги вносят только сферические капли.

При падении вниз в воздухе форма капли воды зависит от её объёма. Во время падения поверхностное натяжение воды стремится минимизировать площадь поверхности капли и сделать её сферической, однако вес капли и сила сопротивления воздуха приводят к деформации сферической формы капли.

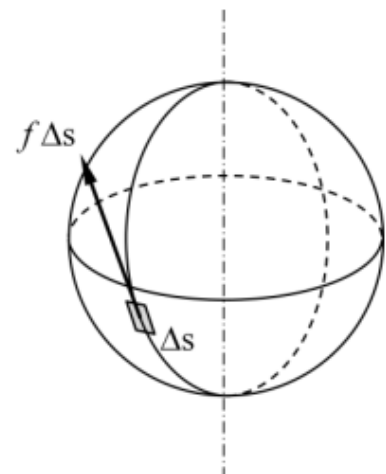
Поверхностное натяжение преобладает в более мелких каплях воды, поэтому они являются сферическими. Для более крупных капель воды вес капли и сила сопротивления воздуха оказывают на каплю более сильное влияние, чем поверхностное натяжение, поэтому форма более крупных капель воды далека от сферической.



Рис.1

Часть А. Максимальный диаметр капли (2.5 балла)

Рассмотрим сферическую каплю диаметром D воды с плотностью ρ , падающую в воздухе с постоянной скоростью. Сила сопротивления воздуха в каждой точке поверхности капли воды направлена по касательной к ней. Для простоты считайте, что сила сопротивления воздуха равномерно распределяется по всей поверхности капли (рис. 2) с неизвестным модулем f на единицу площади поверхности. Ускорение свободного падения равно g .



A1 Определите силу сопротивления f , действующую на единицу площади поверхности капли. Ответ выразите через ρ , D и g . **0.6**

Road to IPhO

Рассмотрим четверть сферической поверхности капли, расположенную в её нижней части.

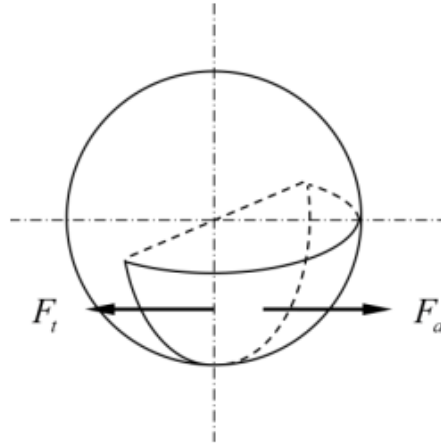


Рис.3

A2 Определите горизонтальную составляющую F_a силы сопротивления воздуха, действующей на четверть сферической поверхности капли в её нижней части, как показано на рис. 3. Ответ выразите через ρ , g и d . **1.0**

Теперь учтём явление поверхностного натяжения.
Коэффициент поверхностного натяжения воды равен σ .

A3 Определите горизонтальную составляющую F_t силы поверхностного натяжения, действующей на четверть сферической поверхности капли в её нижней части, как показано на рис. 3. Ответ выразите через σ и d . **0.5**

При $F_t \gg F_a$ капли имеют сферическую форму. Считайте известными следующие численные значения:

1. $\sigma = 7.5 \cdot 10^{-2}$ Н/м;
2. $\rho = 1.0 \cdot 10^3$ кг/м³;
3. $g = 9.8$ м/с².

A4 Считая, что критерием сферической поверхности капли является условие: **0.4**

$$F_t \geq 100F_a.$$

Рассчитайте максимальное значение её диаметра.

Часть В. Преломление и отражение световых лучей в сферической капле воды (3.0 балла)

Рассмотрим луч света, который преломляется в капле воды, затем однократно отражается в капле воды и, наконец, преломляется в воздух, как показано на рис. 4. Здесь α – угол падения луча на поверхность капли, а θ – угол между отраженным лучом и обратным направлением падающего луча. Показатель преломления воды равен n .

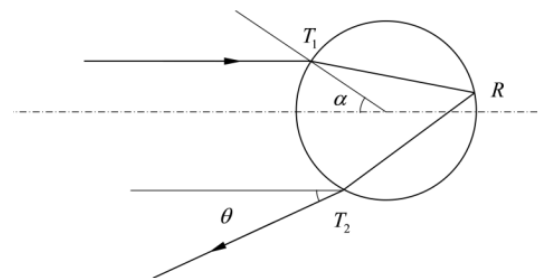


Рис.4

Road to IPhO

B1 Определите угол θ . Ответ выразите через α и n .

0.8

Рассмотрим каплю диаметром D , освещаемую параллельным пучком света с интенсивностью I_0 .

Вам предстоит найти угловое распределение интенсивности $J(\theta)$ преломлённого в воздух после однократного отражения света:

$$J(\theta) = \lim_{\substack{\Delta\theta \rightarrow 0 \\ \Delta\varphi \rightarrow 0}} \frac{\Delta P}{\Delta\theta\Delta\varphi}$$

где ΔP – мощность преломлённого в воздух света, распространяющегося в угловом диапазоне $\Delta\theta\Delta\varphi$ (рис. 5).

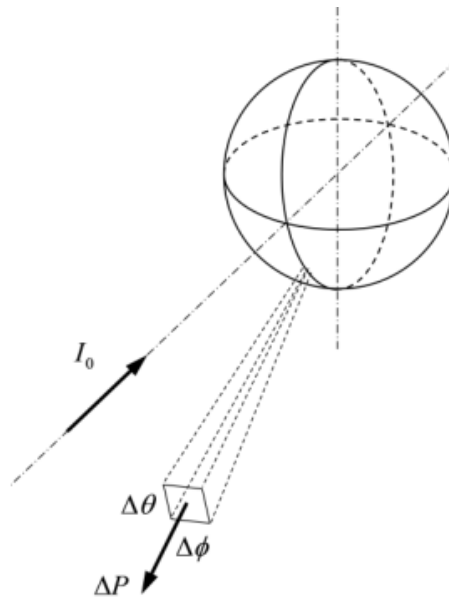


Рис.5

Напомним два следующих определения:

1. Коэффициентом прохождения T называется доля от падающей на границу раздела энергии, прошедшей границу раздела.
2. Коэффициентом отражения R называется доля от падающей на границу раздела энергии, отражённой от границы раздела.

Коэффициент прохождения из воздуха в воду обозначим за T_1 , коэффициент прохождения из воды в воздух – за T_2 , а коэффициент отражения в воде на границе раздела вода–воздух – за R_e .

B2 Определите угловое распределение интенсивности $J(\theta)$ света, преломлённого в воздух после однократного отражения в капле. Ответ выразите через I_0 , D , n , α , T_1 , T_2 и R_e . **1.2**

B3 Для монохроматических источников света с длиной волны $\lambda = 550$ нм рассчитайте угол θ_M , соответствующий максимуму $J(\theta)$ и максимальное значение $J(\theta_M)$. Показатель преломления воды при $\lambda = 550$ нм равен $n_g = 1.3342$. **0.5**

Предположим, что падающий свет – это белый свет, содержащий все оптические длины волн в диапазоне $\lambda \in [390;780]$ нм с равными интенсивностями.

B4 Постройте качественный график зависимости интенсивности спектра солнечного света как функции длины волны λ , отраженного вдоль направления $\theta = \theta_M$, найденного в пункте **B3**, и укажите на графике все характерные значения. **0.5**

Road to IPhO

Часть С. Основные характеристики радуги (4.5 балла)

Электромагнитные волны с длиной волны от 390 нм до 780 нм являются видимым светом. Показатель преломления воды $n_v = 1.3439$ при $\lambda = 390$ нм и $n_r = 1.3316$ при $\lambda = 780$ нм. Угловой диаметр Солнца $\delta = 0.5^\circ$.

С1 Вычислите угловой радиус θ_0 и угловую ширину $\Delta\theta$ радуги. Считайте, что солнце находится прямо за наблюдателем. **0.8**

Отраженный солнечный свет также преломляется каплями воды. Дифракционная картина, полученная от капли воды, аналогична дифракционной картине, полученной от круглого отверстия того же диаметра, что и капля.

Если угловой радиус дифракционной картины, полученной от капли воды, больше угловой ширины радуги, то солнечный свет, отраженный от этой капли воды, не способствует образованию радуги.

С2 Вычислите диаметр d_m наименьшей капли воды, способствующей образованию радуги. **1.0**

С3 Если высота нижней границы облаков во время дождя была 800 м, рассчитайте максимальное время T_M после прекращения дождя, в течение которого капли воды, способствующие образованию радуги, все еще могут находиться на высотах выше 200 м. Вязкость воздуха равна $\eta = 1.8 \cdot 10^{-5}$ Па · с. **0.7**

Примечание: на сферическую каплю радиусом r , движущуюся с малой скоростью v в среде с вязкостью η , в соответствии с формулой Стокса действует сила сопротивления, равная:

$$F_{\text{сопр}} = 6\pi r\eta v.$$

Однажды днем радуга появилась в определенном месте.

С4 Если продолжительность светового дня в этот день составляла 14 часов, рассчитайте максимальное время T_r (в часах), в течение которого можно было увидеть радугу в этот день. **2.0**