Пределы Роша

Гравитационные силы возрастают с уменьшением расстояния между телами. Поэтому можно наблюдать, как при сильном сближении, например, жидких спутников и планет, обладающих сильным гравитационным полем, форма спутников начинает изменяться и они, в конце концов, разрушаются.

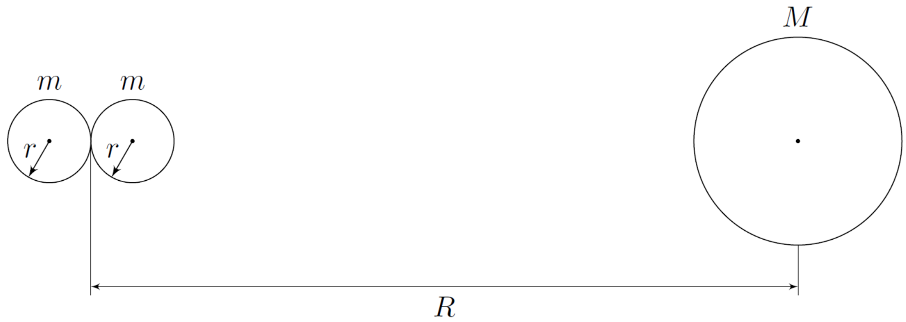
Пределом Роша называется минимально возможный радиус круговой орбиты спутника R_{Roche}, вращающегося вокруг планеты, при котором спутник ещё не разрушается под действием приливных сил, вызванных гравитационным полем планеты.

В данной задаче вам предстоит найти пределы Роша для двойной планетарной системы, а также для жидкого спутника.

Часть A. Предел Роша для двойной планетарной системы (1.5 балла)

Рассмотрим два одинаковых сферических объекта, масса и радиус каждого из которых равны m и r соответственно. Объекты как единое целое движутся в гравитационном поле звезды массы $M \gg m$ по круговым орбитам. Расстояние от точки контакта объектов до звезды обозначим за R.

Считайте, что $R \gg r$ и центры объектов всё время находятся на прямой, проходящей через центры звезды (т.е объекты всё время обращены одной стороной к звезде). Гравитационная постоянная равна G.



A1 Найдите значение радиуса круговой орбиты $R_{\text{ДПС}}$, при котором механическое напряжение в области контакта объектов равняется нулю. **1.5**

Величина $R_{\text{ДПС}}$ является пределом Роша R_{Roche} для двойной планетарной системы.

Жидкий спутник

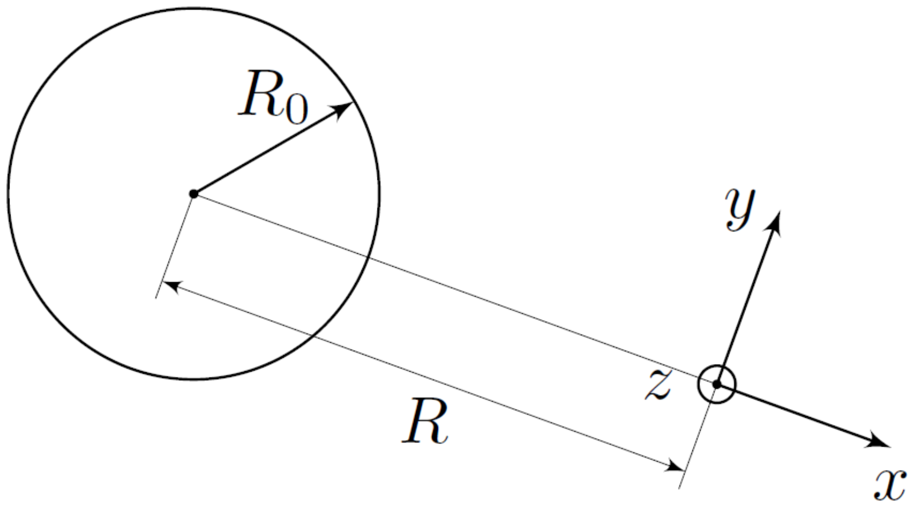
Все оставшиеся пункты задачи ведут к нахождению предела Роша для жидкого спутника. вращающегося вокруг собственной оси синхронно с орбитальным вращением (иными словами, спутник всегда обращён одной и той же стороной к планете.).

Радиус круговой орбиты спутника обозначим за R. Гравитационная постоянная G, радиус планеты R_0, плотность планеты ρ_M и плотность жидкого спутника ρ_m во всех пунктах задачи считаются известными.

Решение задачи проводится в системе отсчёта, вращающейся вокруг центра планеты с орбитальной угловой скоростью вращения спутника, а также в следующих предположениях:

1. центр планеты неподвижен;
2. влиянием всех сил, кроме центробежной, гравитации планеты и собственной гравитации спутника можно пренебречь;
3. жидкость несжимаема;
4. во вращающейся системе отсчёта жидкость неподвижна;
5. все линейные размеры спутника много меньше радиуса круговой орбиты R.

Также при решении задачи пользуйтесь системой координат, начало которой расположено в положении центра масс спутника, ось x направлена вдоль линии, проведённой от планеты к спутнику, ось z направлена вдоль вектора угловой скорости орбитального вращения, а ось y дополняет тройку базисных векторов $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ до правой.



Часть B. Потенциал внешних полей (1.5 балла)

Потенциалом будем называть потенциальную энергию единицы массы, т.е:

$$\varphi = \frac{W_p}{m}$$

В данной части задачи необходимо приближенно описать суммарный потенциал $\varphi_{\text{внеш}}$ поля центробежной силы и гравитационного поля планеты вблизи равновесного положения спутника. Считайте, что в начале координат потенциал $\varphi_{\text{внеш}_0} = 0$.

B1	Получите точное выражение для суммарного потенциала $\varphi_{\text{внеш}}$ в поле центробежной силы и гравитационного поля планеты. Ответ выразите через x, y, z, G, ρ_M, R_0 и R.	**0.7**

B2	В приближении $x, y, z \ll R$ выражение для потенциала φ можно представить в следующем виде: $$\varphi_{\text{внеш}} = A_1x^2 + B_1y^2 + C_1z^2$$ Найдите коэффициенты A_1, B_1 и C_1. Ответы выразите через R, G, R_0 и ρ_M.	**0.8**

В дальнейшем считайте, что коэффициенты B_1 и C_1 равны нулю. Как показывают точные вычисления, их учёт даёт очень малое повышение точности, несравнимое с повышением сложности вычислений.

Таким образом, во всех дальнейших пунктах:

$$\varphi_{\text{внеш}} = A_1x^2$$

Из вида потенциала становится понятно, что рассматриваемая нами фигура является фигурой вращения, а квадратичный вид зависимости потенциала даёт возможность угадать геометрическую фигуру.

Часть C. Гравитационное поле эллипсоида вращения (5.5 балла)

В данной части задачи вам предлагается ознакомиться с гравитационным полем внутри вытянутого эллипсоида вращения, заполненного по всему объёму веществом с плотностью ρ.

В декартовой системе координат xyz эллипсоид вращения описывается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} \leq 1, \quad a \geq b,$$

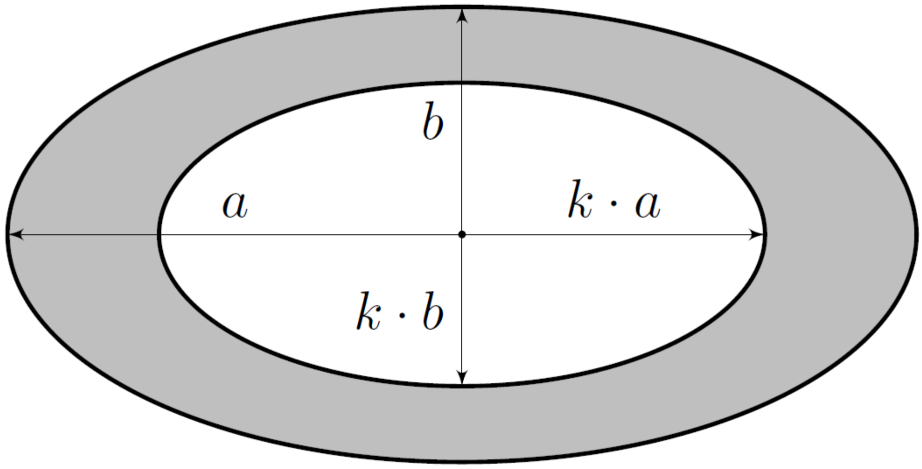
где a и b – соответственно большая и малая полуоси эллипса в любом сечении. содержащем начало координат.

Напомним, что фокусы эллипса находятся на расстоянии $2c = 2\sqrt{a^2-b^2}$ друг от друга, а эксцентриситет эллипса равен $e = \dfrac{c}{a}$.

Рассмотрим вспомогательную задачу.

В рассматриваемом эллипсоиде создали полость, заданную уравнением:

$$\frac{x^2}{k^2a^2} + \frac{y^2+z^2}{k^2b^2} \leq 1, \quad k < 1.$$



C1	Докажите, что гравитационное поле внутри полости равняется нулю.	**0.8**

Вернёмся к сплошному эллипсоиду.

C2 Пусть потенциал в центре эллипсоида равен φ_0. **0.4**

Рассмотрим точку внутри эллипсоида, радиус-вектор относительно центра равен $\vec{r}$. Потенциал в данной точке равен φ_1.

Чему в также лежащей внутри эллипсоида точке с радиус-вектором $\gamma\vec{r}$ равен потенциал $\varphi_2 = \varphi(\gamma\vec{r})$?

Ответ выразите через φ_0, φ_1 и γ.

C3 Покажите, что в точке эллипсоида с координатами x, y, z потенциал можно представить в виде: **1.0**

$$\varphi = \varphi_0 + A_2x^2 + B_2(y^2+z^2).$$

Примечание: обратите внимание, что данное выражение применимо для эллипсоидов сколь угодно малых размеров.

C4 Выразите B_2 через A_2, G и ρ. **0.3**

Примечание: воспользуйтесь теоремой Гаусса в дифференциальной форме для гравитационного поля:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 4\pi\rho G.$$

C5 Потенциал φ на поверхности эллипсоида можно представить как функцию только координаты x в следующем виде: **0.3**

$$\varphi = C_2 + x^2D_2.$$

Выразите C_2 и D_2 через φ_0, A_2, G, ρ, a, x и эксцентриситет e.

Как видно, эллипсоид вращения может создать поле, удовлетворяющее условию эквипотенциальности поверхности жидкости. Для этого необходимо найти зависимость коэффициента A_2 от эксцентриситета e эллипсоида.

C6 Решим вспомогательную задачу: по поверхности диска радиуса R равномерно распределена масса с поверхностной плотностью σ. **0.5**

Найдите потенциал диска $\varphi_д$ на оси на расстоянии x от его центра. Ответ выразите через σ, G, R и x.

C7 Найдите потенциал φ_0 в центре эллипсоида. Ответ выразите через G, ρ, a и e. **1.0**

Примечание: вам может понадобиться следующий интеграл:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{1+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{2} + \mathrm{const}\,.$$

C8 Найдите потенциал эллипсоида φ_a в точке с координатами $(x, y, z) = (a, 0, 0)$. Ответ выразите через G, ρ, a и e. **1.0**

Примечание: вам может понадобиться следующий интеграл:

$$\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{x^2-1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{2} + \mathrm{const}\,.$$

C9 Найдите коэффициент A_2. Ответ выразите через G, ρ и e. **0.2**

Часть D. Нахождение предела Роша (1.5 балла)

Для равновесия жидкого спутника его поверхность должна быть эквипотенциальна. В предыдущей части задачи мы показали, что потенциал на поверхности однородного эллипсоида вращения можно представить как функцию только координаты x.

D1 Постройте на листе миллиметровой бумаги график зависимости коэффициента D_2 от эксцентриситета e эллипсоида, образованного спутником. **0.7**

D2 При каком значении эксцентриситета e предел Роша достигается? **0.3**

D3 Найдите предел Роша R_{Roche}. Ответ выразите через R_0, ρ_M и ρ_m. **0.5**