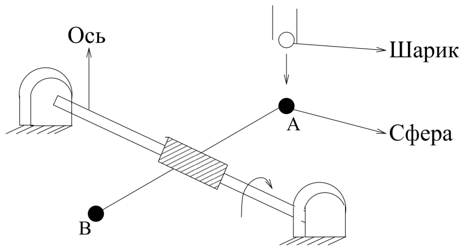
Какой-то странный спиннер...

Рассмотрим механическую систему, показанную на рисунке. Две небольшие сферы A и B массы m закреплены на концах однородного стержня длиной $2l$ и массой $4m$, прикрепленного за середину перпендикулярно к горизонтальной оси. Над точкой начального положения сферы A, в котором стержень горизонтален и неподвижен, находится вертикальный туннель, из которого в специально подобранные моменты времени вылетает шарик массой m, сталкивающийся со сферами и заставляющий систему вращаться вокруг оси. Скорость вылетающего шарика непосредственно перед столкновением равна v. В результате первого столкновения система приобретает некоторую угловую скорость ω_1. Когда сфера B попадает в положение, в котором изначально находилась сфера A, B сталкивается с новым шариком, а система приобретает некоторую угловую скорость ω_2, и так далее. Во всех частях задачи части все столкновения считайте упругими. Размерами шариков и сфер пренебрегите.



Часть A. Центральные соударения без диссипаций (2.0 балла)

В этой части задачи все столкновения являются центральными. Диссипаций в системе нет.

A1 Определите момент инерции системы из стержня и сфер относительно оси вращения. Ответ выразите через m и l. **0.3**

A2 Выразите угловую скорость ω_{i+1} системы после столкновения с $i+1$-ым вылетевшим шариком через ω_i, v и l. **0.5**

A3 Чему равна ω_1? Ответ выразите через v и l. **0.2**

Как можно ожидать, угловая скорость такой вращающейся системы стремится при $i \to \infty$ к постоянному значению ω^*.

A4 Выразите ω^* через v и l. **0.2**

A5 Решив рекуррентное уравнение, полученное в пункте **A1**, получите явное выражение для ω_i. Ответ выразите через i, v и l. *Подсказка:* воспользуйтесь переменной $\omega_i' = \omega_i - v/l$. **0.6**

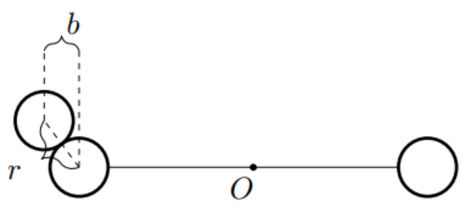
Пусть теперь вместо одной пары сфер их у нас будет две пары, размещённые на стержнях, перпендикулярных друг другу и оси.

A6 Каким будет предельное значение ω^* для такой системы? **0.2**

Часть B. Нецентральные соударения без диссипаций (3.0 балла)

Вернёмся обратно к системе с одной парой сфер. В данной части задачи изучаются нецентральные соударения шариков со сферами A и B. Диссипаций в системе нет (в том числе трения между вылетающим шариком и сферами).

Будем характеризовать нецентральный удар параметром $k = b/r$, где $b < r$ — прицельный параметр, с которым вылетевший шарик налетает на сферу, а $r \ll l$ — расстояние между центрами шарика и сферы при их соприкосновении (см. рис).



B1 При каком значении параметра k_0 скорость первого вылетевшего шарика сразу после столкновения со сферой будет направлена горизонтально? **1.0**

Далее рассматривается произвольное значение параметра k.

B2	Выразите угловую скорость ω_{i+1} системы после столкновения с $i+1$-ым вылетевшим шариком через ω_i, v, l и k.	**1.0**

B3	Чему равна ω_1? Ответ выразите через v_0, l и k.	**0.2**

B4	Решив рекуррентное уравнение, полученное в пункте **B2**, получите явное выражение для ω_i. Ответ выразите через i, v и l.	**0.8**

Часть C. По мотивам Коткина–Сербо (4.0 балла)

В данной части задачи изучается движение системы под воздействием *трения*. Под действием трения этом на систему действует момент M, являющийся некоторой функцией угловой скорости ω. В зависимости от геометрии системы, основной вклад даёт:

1. Сухое трение – момент $M = \alpha I = \mathrm{const}$;
2. Линейное вязкое трение – момент $M = \beta I \omega$, $\beta = \mathrm{const}$;
3. Квадратичное вязкое трение – момент $M = \gamma I \omega^2$, $\gamma = \mathrm{const}$.

Здесь I – момент инерции системы. Вместо момента инерции системы и скорости шарика введём параметры $\varepsilon = \frac{ml^2}{I}$ и $\omega_0 = \dfrac{v}{l}$. Во всех пунктах части **C** соударения являются центральными и упругими. Все ответы в пунктах **C1**–**C3** выразите через ε и ω_0.

C1	Найдите, при каких значениях параметра α система в режиме сухого трения будет продолжать движение неограниченно долго после первого столкновения с шариком.	**0.5**

C2	Найдите, при каких значениях параметра β система в режиме линейного вязкого трения будет продолжать движение неограниченно долго после первого столкновения с шариком.	**0.5**

C3	Найдите, при каких значениях параметра γ система в режиме квадратичного вязкого трения будет продолжать движение неограниченно долго после первого столкновения с шариком.	**0.5**

Приступим теперь непосредственно к точному вычислению установившихся средних угловых скоростей в каждом из трёх режимов. Для этого совместно с уравнением для столкновения с шариком нужно решить уравнение свободного движения системы и найти стационарные точки.

C4	Найдите установившуюся среднюю по периоду угловую скорость системы $\overline{\omega}_1$ в режиме сухого трения. Выразите ответ через ε, α и ω_0.	**0.8**

Ответы в пунктах **C5** и **C6** выразите через ε, β и ω_0.

C5	Найдите стационарное значение угловой скорости $\omega_2^{\uparrow}$ системы непосредственно после очередного столкновения с шариком в режиме линейного вязкого трения.	**0.5**

C6	Найдите установившуюся среднюю по периоду угловую скорость системы $\overline{\omega}_2$ в режиме линейного вязкого трения.	**0.4**

Ответы в пунктах **C7** и **C8** выразите через ε, γ и ω_0.

C7	Найдите стационарное значение угловой скорости $\omega_3^{\uparrow}$ системы непосредственно после очередного столкновения с шариком в режиме квадратичного вязкого трения.	**0.5**

C8	Найдите установившуюся среднюю по периоду угловую скорость системы $\overline{\omega}_3$ в режиме квадратичного вязкого трения.	**0.4**