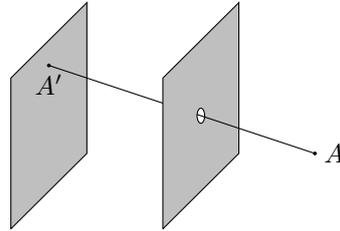


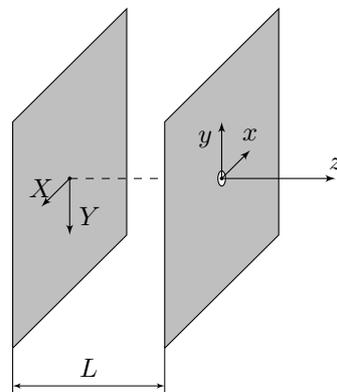
# Road to IPhO

## Горизонты физики

В этой задаче вам предлагается изучить принцип работы фотоаппарата на примере камеры-обскуры. Она представляет собой ящик с параллельными стенками, в одной из которых проделано малое отверстие. Свет, проходящий через это отверстие, формирует изображение на противоположной стенке – экране. Изображение любой точки пространства будет находиться в месте пересечения луча, идущего из этой точки через отверстие, и экрана.



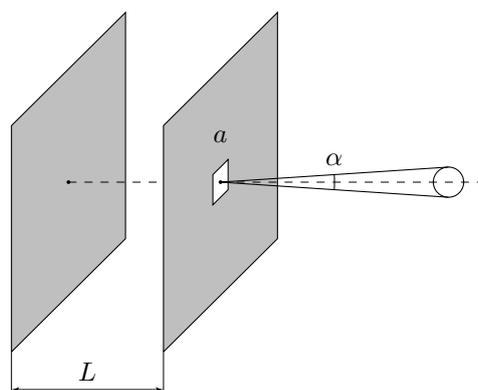
На экране получается перевёрнутое изображение объектов перед камерой, поэтому фотография получается путём переворота получаемой картины. Удобно ввести систему координат для камеры как показано на рисунке. Координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  определяют положения объектов в пространстве, а  $X$  и  $Y$  – координаты изображения.



### Часть А. Древняя физика (1.2 балла)

Первые камеры-обскуры представляли собой затемнённые помещения с отверстием в одной из стен. Упоминания о камере-обскуре встречаются ещё в V–IV веке до н.э. — последователи китайского философа Мо-цзы описали возникновение перевёрнутого изображения на стене затемнённой комнаты. Возможно, упоминание о камере-обскуре встречаются у Аристотеля, который задавался вопросом, каким образом может возникать круглое изображение Солнца, когда оно светит через квадратное отверстие. Изучим подробнее этот эффект.

Пусть Солнце на закате снимают с помощью камеры-обскуры, являющейся комнатой длиной  $L = 10$  м, с квадратным отверстием. Камера направлена на Солнце, угловой размер Солнца (отношение диаметра Солнца к расстоянию до него от Земли) равен  $\alpha = 0.5^\circ$ , поэтому все лучи можно считать параксиальными.



# Road to IPhO

**A1** Пусть сторона квадратного отверстия равна  $a = 1\text{ м}$ . Найдите характерный угловой размер  $\beta$  отверстия при взгляде с экрана. Сравните его с угловым размером Солнца. **0.2**

**A2** Пусть теперь сторона квадратного отверстия равна  $a = 5\text{ мм}$ . Найдите характерный угловой размер  $\beta$  отверстия при взгляде с экрана. Сравните его с угловым размером Солнца. **0.2**

**A3** В листах ответов качественно приведите изображение Солнца при  $a = 1\text{ м}$ . Укажите размеры, характеризующие это изображение. **0.3**

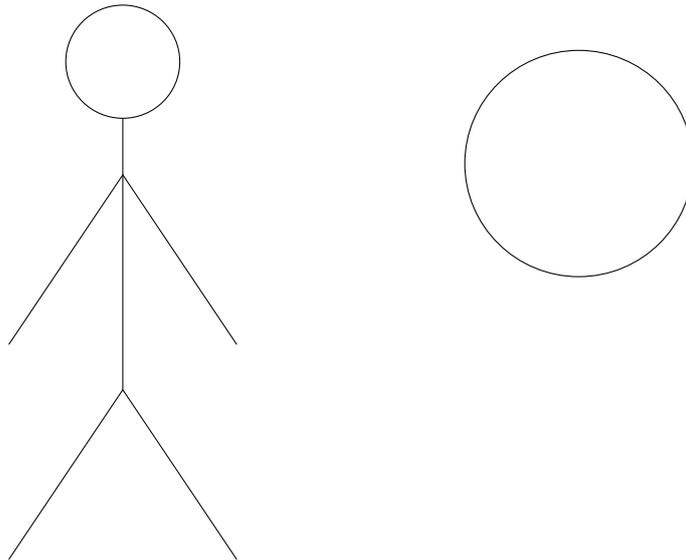
**A4** В листах ответов качественно приведите изображение Солнца при  $a = 5\text{ мм}$ . Укажите размеры, характеризующие это изображение. **0.5**

Далее во всех частях задачи отверстие будем считать точечным, то есть его угловой размер при взгляде с экрана будет много меньше характерных угловых размеров снимаемых объектов.

## Часть В. Фотография человека (1.0 балл)

Рассмотрим фотографирование человека камерой-обскурой. Для качественного описания будем рассматривать человека как стержень длиной  $h$ . Пусть камера длиной  $L$  направлена горизонтально и всегда ориентирована на середину человека. Человек удаляется от камеры со скоростью  $v$ . В момент времени  $t = 0$  расстояние между камерой и человеком  $l_0$ . Считайте, что изображение человека целиком расположено на экране.

**B1** Найдите зависимость размера  $a$  изображения человека от времени  $t$ . **0.3**



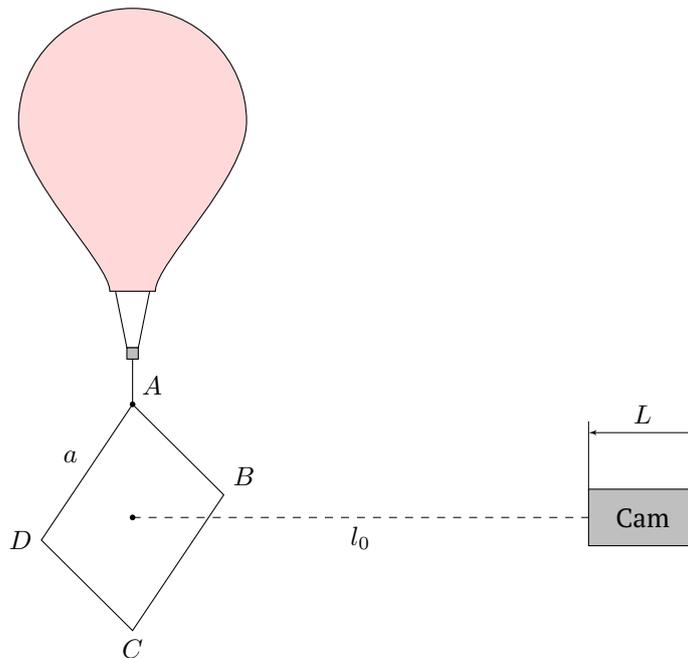
**B2** На рисунке показаны изображения взрослого человека и Солнца (угловой размер Солнца  $\alpha = 0.5^\circ$ ) в неизвестном масштабе. Оцените, на каком расстоянии был взрослый человек в момент фотографирования. **0.7**

## Часть С. Флаг на воздушном шаре (3.3 балла)

Пусть квадратный флаг со стороной  $a$  подвешен за одну из своих вершин к воздушному шару, поднимающемуся вертикально вверх со скоростью  $v$ . Камера-обскура длиной  $L$  снимает флаг и всегда направлена на его центр. Считайте, что камеру поворачивают так, что её отверстие неподвижно. Изначально центр флага и камера находятся на одной высоте на расстоянии  $l_0$  друг от друга, а плоскость флага в этот момент перпендикулярна направлению камеры. Диагональ  $AC$  в любой момент вертикальна, а флаг не вращается.

**C1** Докажите, что изображение отрезка на фотографии будет отрезком или лучом. **0.2**

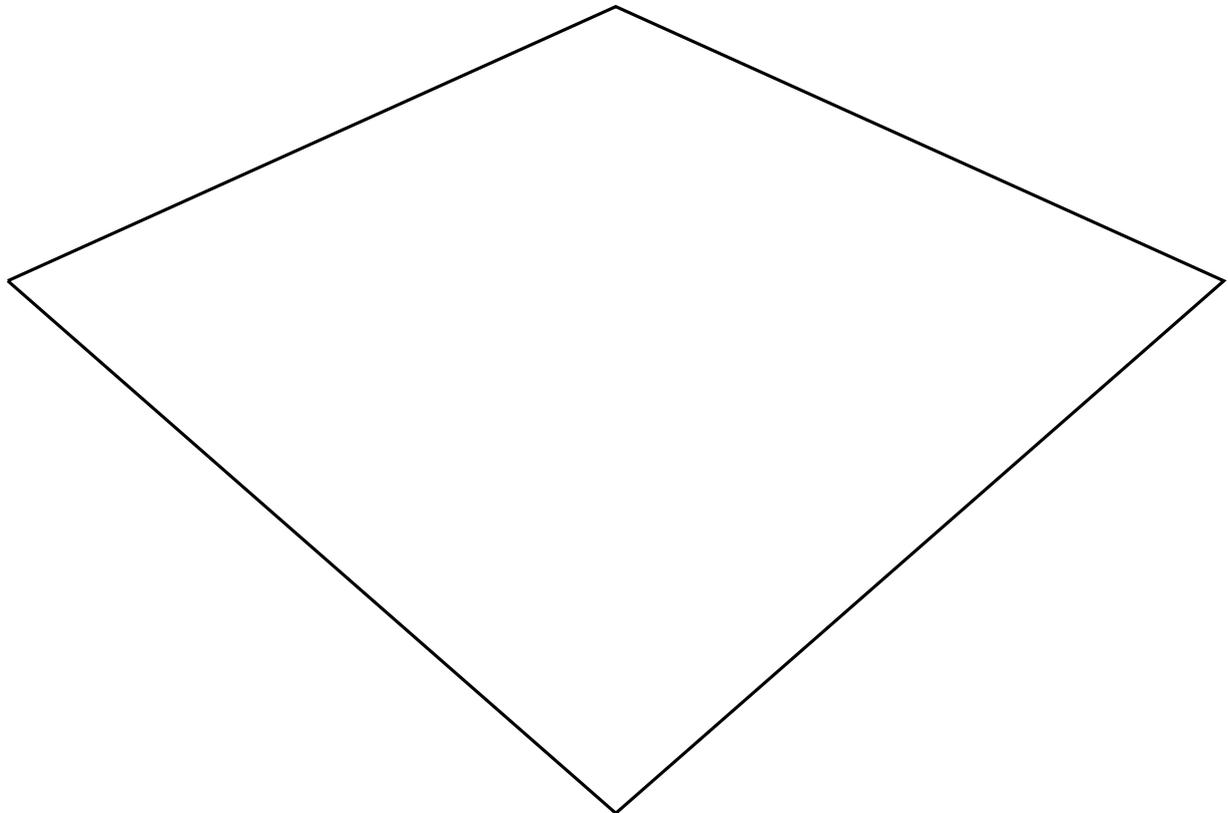
# Road to IPhO



**C2** При каком соотношении между  $l_0$  и  $a$  на экране в любой момент времени будут изображены все точки флага, если пренебречь конечностью размеров экрана? Во всех последующих пунктах данной части задачи считайте полученное условие выполненным. **0.5**

**C3** Найдите координаты  $(X, Y)$  вершин флага на фотографии в зависимости от времени. **1.4**

Далее известно, что  $l_0 = 3\text{м}$ ,  $v = 1\text{м/с}$ .

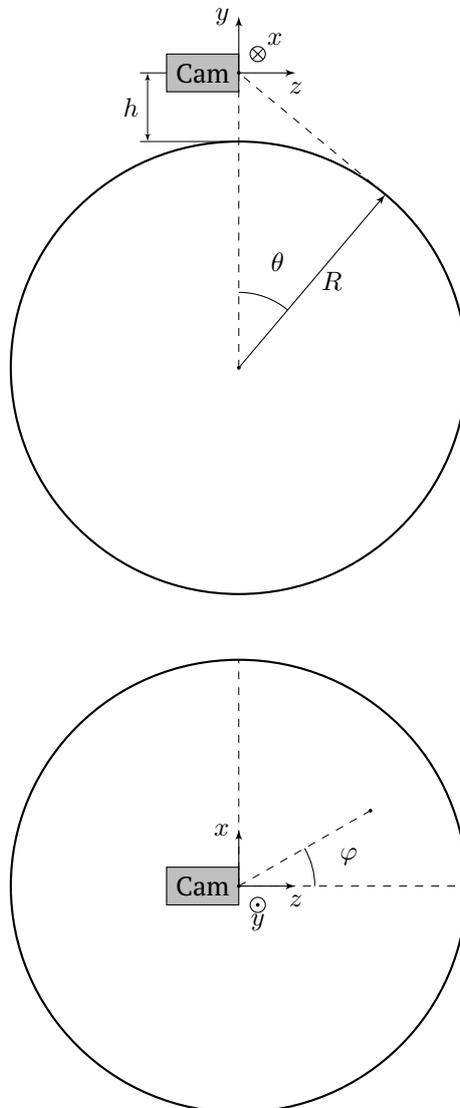


# Road to IPhO

**C4** На рисунке изображена фотография флага в неизвестном масштабе. Определите, в какой момент времени  $\tau$  была сделана фотография. **1.2**

## Часть D. Фотография горизонта (3.5 балла)

В данной части задачи мы изучим фотографию горизонта, полученную с помощью горизонтальной камеры-обскуры. Радиус Земли  $R = 6378\text{км}$ , неровностями поверхности можно пренебречь.



Будем характеризовать положение точки горизонта углами  $\varphi$  и  $\theta$  (см. рис.).  
Для начала перенебрежём влиянием атмосферы.

**D1** Чему равен угол  $\theta$ ? Ответ выразите через  $R$  и  $h$ . **0.1**

**D2** Определите координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  точки горизонта, соответствующей углу  $\varphi$ . Ответ выразите через  $\theta$ ,  $R$ ,  $\varphi$ . **0.4**

**D3** Докажите, что координаты  $X$ ,  $Y$  связаны с координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$  соотношениями: **0.2**

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{L}{z}$$

# Road to IPhO

**D4** Покажите, что изображение горизонта на экране описывается следующим уравнением:

**0.7**

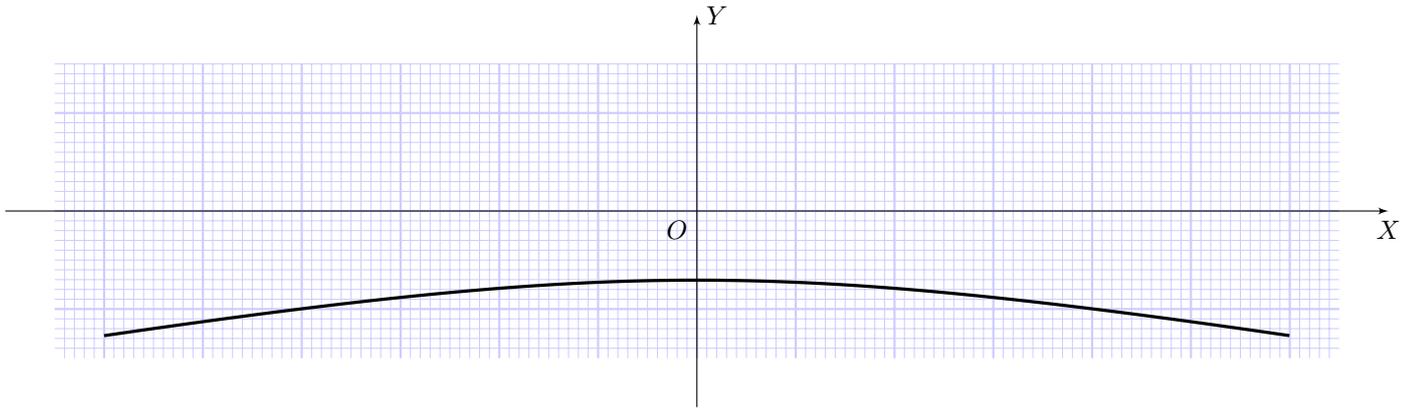
$$\frac{Y^2}{A^2} - \frac{X^2}{B^2} = 1,$$

где  $A, B > 0$ . Выразите  $A$  и  $B$  через  $L$  и  $\theta$ .

*Примечание:* следующее выражение может оказаться полезным:

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1 + \tan^2 \varphi.$$

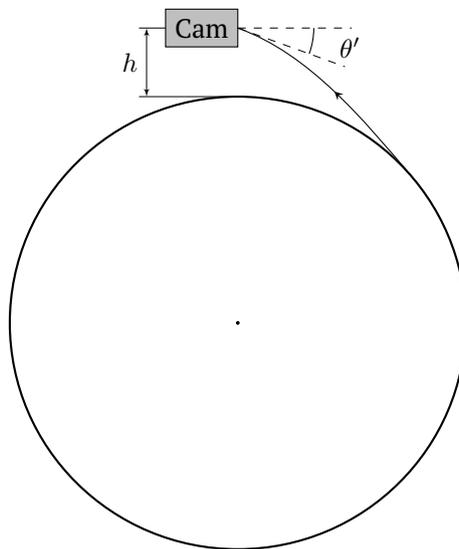
На рисунке приведена часть фотографии горизонта в неизветсном, но одинаковом по осям масштабе.



**D5** Определите, с какой высоты  $h$  была сделана фотография.

**1.0**

В действительности лучи, попадающие в камеру, распространяются не по прямой. Ход лучей, характеризующих горизонт на фотографии, приведён на рисунке.



Коэффициент преломления воздуха линейно зависит от плотности:  $n = 1 + \alpha \rho_{air}$ . Отличие показатель преломления воздуха у поверхности Земли от единицы составляет  $n_0 - 1 = 2.74 \cdot 10^{-4}$ . Отличием показателя преломления от единицы на высоте фотографирования можно пренебречь.

**D6** Определите угол  $\theta'$ . Ответ выразите через  $R$ ,  $n_0$  и  $h$ .

**0.5**

**D7** С учётом малости  $n_0 - 1$  определите, на какую величину  $\Delta h$  отличается реальная высота фотографирования от полученной вами в пункте **D5**. Выразите ответ через  $n_0 - 1$ ,  $R$  и  $h$ , рассчитайте его численное значение

**0.6**

В дальнейшем влиянием атмосферы будем пренебрегать.

# Road to IPhO

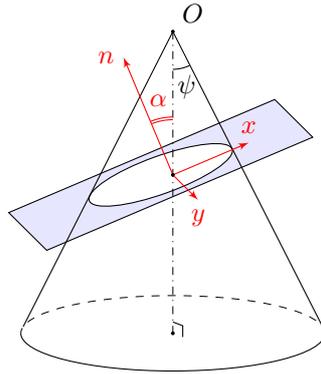
## Часть Е. Фокусировка на горизонт (2.0 балла)

Для анализа границ изображения какого-либо объекта могут понадобиться знания о конических сечениях.

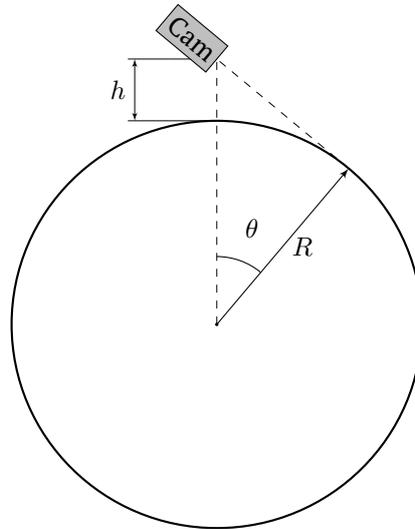
Конус – поверхность, образованная в пространстве множеством лучей (образующих конуса), соединяющих все точки некоторой плоской кривой (направляющей конуса) с данной точкой пространства (вершиной конуса).

Частным случаем конуса является прямой круговой конус, его направляющая кривая – окружность, а вершина лежит на оси симметрии этой окружности. Заметим, что границы изображения предмета в камере-обскуре, образуются касательными к нему лучами проходящими через отверстие камеры. Эти лучи образуют конус. Изображение границ предмета – сечение этого конуса плоскостью экрана.

Особый интерес может представлять случай кругового конуса. В этом случае сечение плоскостью будет кривой второго порядка: эллипс при  $90^\circ - \psi > \alpha$ , парабола при  $90^\circ - \psi = \alpha$ , гипербола  $90^\circ - \psi < \alpha$ .



Теперь рассмотрим фотографирование горизонта с помощью камеры, наведённой на одну из его точек.



При малых высотах камера может снять только некоторую часть горизонта, а при больших его видно полностью.

**E1** Определите  $h_{cr}$ , начиная с которого при подъёме горизонт видно полностью. **0.3**

Видимая доля горизонта определяется отношением длины дуги горизонта, состоящей из точек, попадающих на фотографию, к длине всей окружности горизонта.

**E2** Определите зависимость видимой части горизонта  $\eta$  от величины  $h/R$ . Постройте график этой зависимости. **1.1**

*Примечание:* при промежуточных вычислениях может быть полезен угол  $\theta$ , показанный на рисунке.

**E3** Нарисуйте качественные изображения горизонта при  $h < h_{cr}$ ,  $h = h_{cr}$  и  $h > h_{cr}$ . Определите типы кривых, получающихся при фотографировании с разных высот. **0.6**