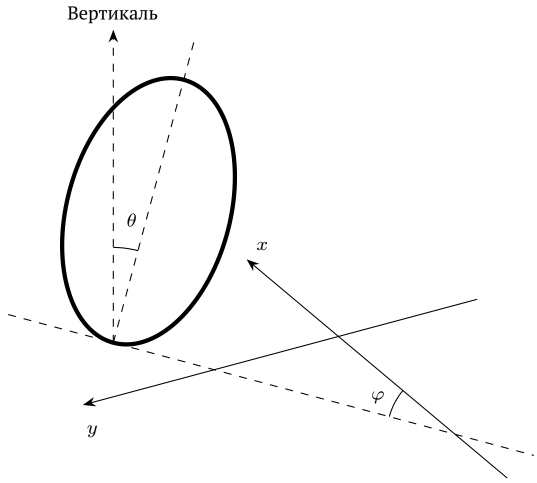
Качающееся колесо (3.5 балла)

Тонкое однородное жёсткое колесо с радиусом R и массой M катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости xy, образуя с вертикалью угол $\theta(t)$. Как показано на рисунке, плоскость колеса пересекается с xy по прямой, образующей угол $\varphi(t)$ с осью x. Координаты точки соприкосновения колеса с поверхностью обозначим как $(x(t), y(t), 0)$. Ускорение свободного падения равно g.



Функции $x(t)$, $y(t)$, $\theta(t)$ и $\varphi(t)$, с помощью которых мы будем описывать движение колеса, не являются в полной мере независимыми.

A1	Найдите кинематическую связь между этими функциями. В ответ могут войти как сами функции, так и их производные по времени.	**0.5**

Рассмотрим частный случай равномерного кругового движения колеса, т.е. когда точка его соприкосновения с поверхностью перемещается с постоянной скоростью, описывая окружность радиуса r вокруг вертикальной оси z. При этом $\theta(t) = \theta = \mathrm{const}$, а $\varphi(t)$ – линейная функция времени. В лабораторной системе отсчёта Σ можно, не умаляя общности, положить:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix},$$

где ω – угловая скорость, которую ещё предстоит найти. В системе отсчёта Σ', вращающейся с угловой скоростью ω вокруг оси z, углы θ и φ постоянны, а колесо вращается вокруг сохраняющей ориентацию оси симметрии. В этой системе отсчёта на каждый участок колеса буду также действовать центробежная сила и сила Кориолиса.

A2	Найдите действующие на колесо центробежную силу $\vec{F}_{\text{ц}}$ и силу Кориолиса $\vec{F}_{\text{K}}$, а также результирующие моменты этих сил $\vec{\tau}_{\text{ц}}$ и $\vec{\tau}_{\text{K}}$ соответственно.	**1.0**

A3	Найдите угловую скорость ω и силу трения $\vec{f}$, действующую на колесо со стороны поверхности (ω не должна входить в ответ).	**0.8**

Если же колесо катится с достаточно большой скоростью, вертикальное положение $\theta = 0$ может оказаться устойчивым. В этом случае можно считать, что центр масс колеса движется с почти постоянной скоростью V в положительном направлении оси x. Тогда в первом приближении можно записать $x(t) = Vt + \delta x(t)$, где $\delta x(t)$ – малая величина, меняющаяся по гармоническому закону с некоторой угловой скоростью Ω (как и $y(t)$, $\theta(t)$ и $\varphi(t)$).

A4	Выведите в первом нетривиальном приближении уравнения движения колеса. Найдите отсюда угловую скорость Ω и минимальное значение $V_{\min}$ скорости колеса, при которой вертикальное положение будет устойчивым.	**1.2**