

Road to IPhO

Движение в электростатическом поле диполя

Задача о движении частицы под действием как радиальной, так и тангенциальной сил, как правило, оказывается довольно сложной и требует знания продвинутого математического аппарата. Однако некоторые системы, такие как точечный заряд и диполь, обладающие очень специфическим электростатическим полем, дают интересные результаты, даже когда момент импульса не сохраняется.

Считайте, что релятивистскими эффектами и излучением можно пренебречь, если не сказано обратное. Электрическая постоянная равна ϵ_0 .

Часть А. Движение диполя (2.4 балла)

Рассмотрим плоскую задачу. Положения заряда $Q > 0$ и центра диполя фиксированы и находятся на расстоянии L друг от друга (см. рис. 1). Диполь состоит из двух частиц массой m , соединенных небольшим твердым стержнем длиной d , $d \ll L$. Заряды частиц равны $q > 0$ и $-q$. Диполь может свободно вращаться вокруг центра.

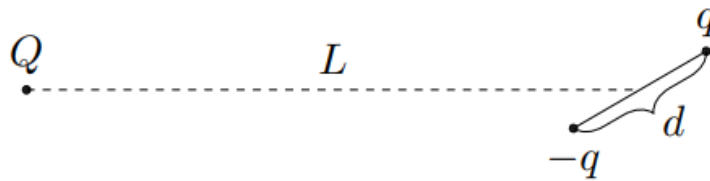


Рис. 1

A1 Найдите период малых колебаний диполя. Ответ выразите через m , Q , q , d , L и ϵ_0 .

0.3

Теперь диполь насажен на невесомый стержень, который может свободно вращаться вокруг заряда Q . Диполь может свободно скользить вдоль стержня.

Изначально диполь покоился на расстоянии L от заряда, и в некоторый момент ему сообщили скорость v_0 , направленную перпендикулярно стержню.

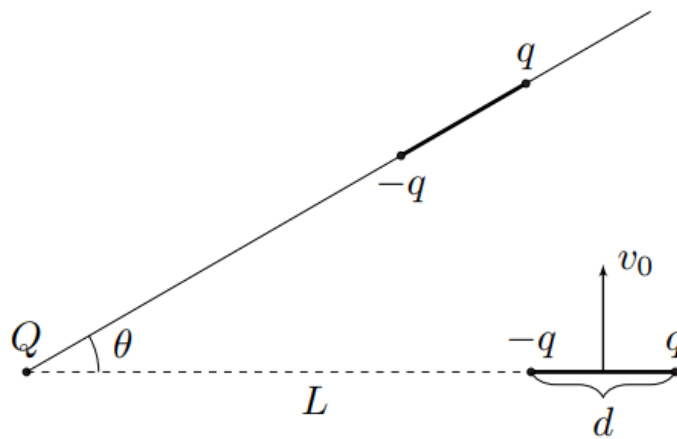


Рис. 2

A2 Найдите радиальную и азимутальную компоненты скорости v_r и v_θ соответственно. Ответ выразите через Q , q , m , d , v_0 , L , ϵ_0 и расстояние между зарядом и диполем r .

0.5

Чтобы диполь приближался к заряду, его начальная скорость не должна превосходить некоторого критического значения v_{cr} .

A3 Найдите критическую скорость v_{cr} . Ответ выразите через Q , q , m , d , L и ϵ_0 .

0.2

A4 Диполь запускают с критической скоростью v_{cr} . Изобразите траекторию, описываемую центром диполя за большое время, учитывая потери энергии на излучение.

0.4

Road to IPhO

Диполь запускают со скоростью v_0 , меньше критической.

A5 Найдите время τ , за которое расстояние между диполем и зарядом уменьшается в два раза. Ответ выразите через L , v_0 и v_{cr} . **0.4**

A6 Каков угол поворота стержня $\theta(\tau)$ к моменту времени τ ? Ответ выразите через v_0 и v_{cr} . **0.6**

Часть В. Движение в поле неподвижного диполя (2.6 балла)

Во всех последующих частях задачи рассматривается система, в которой момент импульса не сохраняется. Система та же, что и в предыдущей части, однако теперь диполь закреплен, и в его поле движется частица массой m с зарядом Q . Для описания движения будем использовать полярную систему координат, т.е. положение заряда будем описывать расстоянием до диполя r и углом θ , отсчитываемым против часовой стрелки (см. рис. 3). Изначально заряд покоился на расстоянии L от диполя, и в некоторый момент ему сообщили скорость v_0 , направленную перпендикулярно стержню.

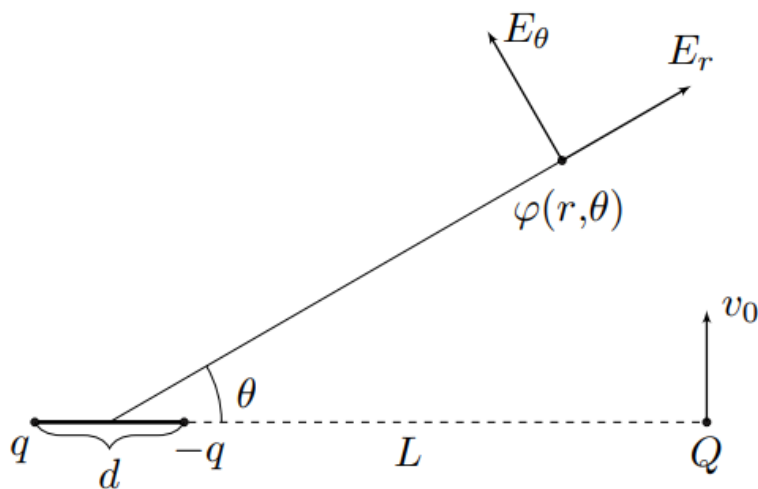


Рис. 3

B1 Найдите потенциал $\varphi(r, \theta)$ в точке с координатами (r, θ) , где $r \gg d$.
Ответ выразите через q , d , r, θ и ε_0 . **0.2**

B2 Найдите проекции электрического поля E_r и E_θ . Ответ выразите через r , θ , q , d и ε_0 . **0.3**

B3 Найдите момент сил относительно диполя, действующий на заряд Q в точке с координатами (r, θ) . Ответ выразите через Q , q , d , r, θ и ε_0 . **0.1**

B4 Найдите азимутальную компоненту скорости v_θ .
Ответ выразите через v_0 , Q , q , m , d , L , ε_0 , r и θ . **1.0**

B5 Найдите радиальную компоненту скорости v_r как функцию r и θ .
Ответ выразите через v_0 , Q , q , m , d , L , ε_0 , r и θ . **0.4**

B6 За какое время τ' расстояние между диполем и зарядом уменьшается в два раза?
Ответ выразите через v_0 , Q , q , m , d , L и ε_0 . **0.6**

Road to IPhO

Часть С. Круговое движение (1.7 балла)

В данной части задачи заряд Q массой m соединен с диполем непроводящим стержнем длиной L , так что заряд движется по окружности радиусом L , причём в положении, показанном на рис. 3, скорость заряда равна v_0 . Стержень вращается свободно.

C1 Найдите максимальную и минимальную скорости заряда v_{\max} и v_{\min} . **0.4**

Ответы выразите через v_0, Q, q, m, d, L и ε_0 .

C2 Найдите силу N , действующую на заряд со стороны стержня. **0.4**

Ответ выразите через $m, L, Q, q, d, v_0, \theta$ и ε_0 .

C3 Возможно ли движение заряда по окружности при отсутствии стержня? **0.5**

Если да, то какова должна быть начальная скорость v_{cr} ?

Ответ выразите через m, L, Q, q, d и ε_0 .

C4 Начальная скорость заряда равна v_{cr} , полученной в предыдущем пункте. **0.4**

Изобразите траекторию, описываемую зарядом за большое время, учитывая потери энергии на излучение.

Часть D. Сечение падения в центр неподвижного диполя (1.3 балла)

Рассмотрим поток частиц с зарядом Q и массой m , движущихся в направлении угла θ_0 со скоростью v_0 из бесконечности, как показано на рис. 4.

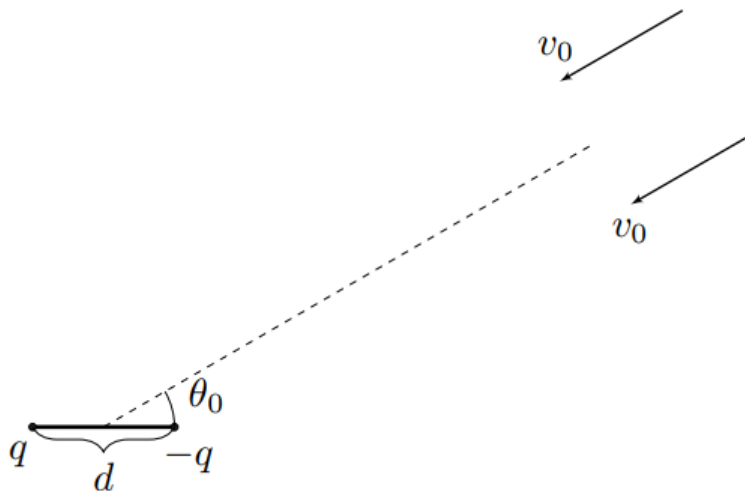


Рис. 4

D1 Считая применимым выражения для потенциала диполя $\varphi(r, \theta)$ при любых значениях r , покажите, что частицы могут упасть в центр поля диполя при углах $\theta_0 < \pi/2$. **0.5**

Примечание: Сечением падения называется площадь поперечного сечения потока падающих в центр поля частиц, на бесконечности летящих в направлении центра поля с одинаковыми по модулю и направлению скоростями.

D2 Найдите сечения падения σ в центр поля диполя. **0.8**

Ответ выразите через $Q, q, d, m, v_0, \theta_0$ и ε_0 .

Road to IPhO

Часть Е. Рассеяние на малые углы (2.0 балла)

Рассмотрим движение заряда Q массой m из бесконечности со скоростью v_0 . На бесконечности прицельный параметр заряда равен b (см. рис. 5).

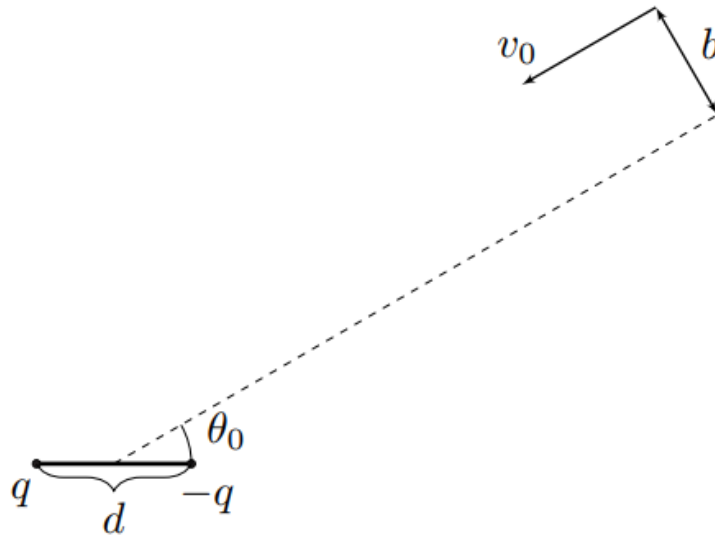


Рис. 5

E1 Определите минимальное расстояние r_{\min} между частицей и диполем. **0.5**

Ответ выразите через q , Q , d , m , v_0 , θ_0 , b и ε_0 .

Рассмотрим случай рассеяния на малые углы, соответствующий таким прицельным параметрам b , что:

$$b \gg \sqrt{\frac{Qqd}{\varepsilon_0 m v_0^2}}$$

E2 Определите угол отклонения $\Delta\theta$ скорости частицы от первоначального направления, когда она снова окажется бесконечно далеко от диполя. Считайте, что $\Delta\theta \ll \theta_0$. **1.5**

Ответ выразите через Q , q , d , m , v_0 , θ_0 , b и ε_0 .